

**Ein quantitatives Modell
zur kollektiven Dissipation in
stoßfrei selbstgravitierenden Systemen**

DISSERTATION

zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Fakultät für Physik
und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von
HARALD JÜRGEN ZIEGLER
aus
Duisburg

Bochum 1989

Dissertation eingereicht am : 5.5.1989

Tag der mündlichen Prüfung : 22.6.1989

Referent : Prof. Dr. K. Schindler

Korreferent : Prof. Dr. K. Rolfs

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für theoretische Physik IV der Fakultät für Physik und Astronomie der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr. K. Schindler danke ich für die Anregung dieser Arbeit und für hilfreiche Diskussionen.

Den Herren U. Arendt, Dr. M. Kießling, Prof. Dr. D. Lynden-Bell und Dr. A. Otto habe ich für wertvolle Diskussionen zu danken.

Herrn Dr. W. Zwingmann verdanke ich den wichtigen Hinweis auf die Arbeit von A.J. Klimas (1987) im Journal of Computational Physics.

Für das Korrekturlesen der Arbeit bedanke ich mich bei Frau B. Bellenberg, Frau H. Brückner und bei Herrn H. Wiechen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn H. Wiechen, dessen Resultate Grundlage dieser Arbeit sind.

Schließlich gilt mein Dank meinen Eltern für Ihr Interesse am Voranschreiten meiner Arbeit und Ihre stete Unterstützung.

Inhalt

Zusammenfassung	1
1. Einleitung	3
2. Das Konzept	8
3. Modellrelaxationen	
3.1 Konstruktion von Modellrelaxationen	17
3.2 Explizite Modellrelaxationen	30
4. Dynamische Behandlung	
4.1 Problemstellung	41
4.2 Numerisches Verfahren	43
4.3 Dynamik auf großen Skalen	50
4.4 Realisierung	56
4.5 Beispiele und Vergleich	58
5. Anmerkungen zum Fall mit Gesamtdrehimpuls	76
6. Zusammenfassung und Diskussion	81
Anhang A	88
Anhang B	90
Anhang C	96
Literatur	101

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein neues Modell zur Relaxation stoßfrei selbstgravitierenden Systeme vorgestellt. Dabei wird die durch numerische Rechnungen nahegelegte Eigenschaft berücksichtigt, daß die Stärke des auf Phasenmischung beruhenden Relaxationsprozesses von der zur dissipativen Umsetzung freien Energie abhängt. Für Systeme ohne Gesamtdrehimpuls ergibt sich diese Energie aus dem energetischen Unterschied zwischen einem Anfangszustand und dem Zustand niedrigster Energie, der durch eine im Phasenraum inkompressible Abbildung aus dem Anfangszustand erreicht werden kann (Wiechen et al. 1988).

Die für stoßfreie Systeme typische dissipative Umsetzung von Energie durch Phasenmischung macht einen Übergang zu einer Beschreibung der Systeme auf endlichen (makroskopischen) Skalen nötig. Der dabei auftretende Informationsverlust wird durch eine geeignete Mittelung einer reduzierten Verteilungsfunktion $g(\varphi)$ beschrieben. $g(\varphi)$ ist innerhalb der exakten, stoßfreien Theorie Konstante der Bewegung und enthält genau die Information eines Zustandes über die Anfangsbedingungen, die nur in der exakten, stoßfreien Dynamik erhalten bleibt. Die Art der Mittelung von $g(\varphi)$ wird durch die Tatsache, daß Gleichgewichtsverteilungen auf großen Skalen immer nur unscharf betrachtete exakte Verteilungsfunktionen sein können, eingeschränkt. Ihre Skala wird durch die zur dissipativen Umsetzung freie Energie bestimmt. Die Endgleichgewichte im Rahmen dieses Modells ergeben sich als Zustände niedrigster Energie, die zu einer geeignet gemittelten reduzierten Verteilungsfunktion gehören. Sie sind stoßfrei global stabil und haben die gleiche Masse sowie die gleiche Energie wie der Anfangszustand, aber höhere Entropie.

Zur Abschätzung der Auswirkung der verbleibenden (notwendigen) Freiheiten in der Modellierung des Relaxationsprozesses wird die Realitätsnähe des Modells anhand von numerischen Simulationen der Dynamik der Systeme geprüft. Um aus

der Phasenraumfilamentierung erwachsende numerische Probleme zu vermeiden, wird eine Methode von Klimas (1987) benutzt, die einen kontrollierten Informationsverlust erlaubt, da es sich um eine streng gültige Dynamik auf festen Skalen im Geschwindigkeitsraum handelt. Die dynamischen Beispiele sind im Ortsraum kugelsymmetrisch. Es zeigt sich in den behandelten Fällen eine gute Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Modellrelaxation. Anhand der Beispiele und der Modellrelaxation wird der Einfluß der Anfangsbedingungen auf die Endverteilungen diskutiert.

Das Gesamtergebnis zeigt, daß es gelungen ist, mit Hilfe weniger plausibler Grundannahmen ein Modell der dynamischen Relaxation zu entwickeln, das den Relaxationsprozeß erstmalig in quantitativ akzeptabler Weise beschreiben kann.

Das Relaxationsmodell ist weitgehend für den einfachen Fall verschwindenden Gesamtdrehimpulses formuliert. Erweiterungen für den Fall nicht verschwindenden Gesamtdrehimpulses unter Berücksichtigung weiterer Konstanten der Bewegung werden jedoch ebenfalls diskutiert.

1. Einleitung

Das Verständnis der physikalischen Prozesse, die zu den beobachteten Formen selbstgravitierender Materie führen, sowie deren selbstkonsistente Beschreibung, sind ein wesentliches Ziel der Stelldynamik.

Die beobachteten Strukturen, z.B. von elliptischen Galaxien, scheinen sich zumindest auf großen Skalen in einem Gleichgewichtszustand zu befinden. Diese Zustände können aber keine thermodynamischen Gleichgewichte sein, denn Stoßwechselwirkungen führen i.a. zum gravothermischen Kollaps (Lynden-Bell & Wood 1968, Saslaw 1968, 1969), so daß singularitätenfreie thermodynamische Gleichgewichtszustände selbstgravitierender Materie i.a. nicht existieren (siehe auch Kießling 1989). Dies ist konsistent mit der Tatsache, daß Stoßwechselwirkungen bei der Entwicklung von elliptischen Galaxien, zumindest für die Sternkomponente, auf den Zeitskalen ihrer Existenz keine Rolle spielen. Unter Berücksichtigung von Kleinwinkelstößen ergibt sich die stoßbedingte Relaxationszeit T_{Relax} zu

$$T_{Relax} \approx \frac{N}{\ln N} T_c \quad (1.1)$$

mit N als Zahl der Massenpunkte (hier Sterne) und T_c als typische Umlaufzeit eines Sterns

$$T_c \approx (4\pi G \rho_c)^{-1/2} \quad (1.2)$$

und ρ_c als typische Massendichte. Mit $N = 10^{11}$ und $\rho_c = 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ ergibt sich $T_c \approx 10^7$ Jahre und $T_{Relax} \approx 10^{16}$ Jahre. Selbst wenn man annimmt, daß eine Galaxie von 10^{11} Sternen nur aus kompakten Sternhaufen von 10^6 Sternen besteht (also $N = 10^5$), liegt T_{Relax} (für die Relaxation der Haufen untereinander) immer noch bei 10^{11} Jahren. Außer durch diese Abschätzung wird die Stoßfreiheit der Sternkomponente elliptischer Galaxien auch dadurch belegt, daß in ihnen keine nennenswerte Massensegregation (schwere Sterne innen, leichte Sterne außen) beobachtbar ist. Da



die beobachteten Strukturen also nicht im thermodynamischen Gleichgewicht sein können, kann es sich lediglich um quasistationäre Zustände auf Zeitskalen $T \ll T_{Relax}$ handeln. Wegen der großen Vielfalt möglicher quasistationärer Zustände entsteht die Frage, inwieweit die beobachteten Galaxien durch ihre Entstehungsgeschichte geprägt sind. Stoßfreie dynamische Relaxation, d.h. Relaxation auf Zeitskalen von einigen T_c , spielt hierbei sicherlich eine entscheidende Rolle. Gegenstand dieser Arbeit ist die Behandlung und weitgehend analytische Modellierung dieses Phänomens als einen isolierten physikalischen Prozeß.

Im Rahmen der exakten, stoßfreien Theorie kann ein selbstgravitierendes System i.a. nicht in ein Gleichgewicht relaxieren. Jedoch können Phasenummischungseffekte dazu führen, daß die zeitlichen Variationen des Systems auf immer kleineren Skalen ablaufen, so daß sich, auf endlichen Skalen betrachtet, ein Gleichgewichtszustand einstellen kann. Der Übergang von der exakten Beschreibung der Systeme zu einer Beschreibung auf endlichen (großen) Skalen bedeutet einen Verlust an Information. Die damit verbundene Erhöhung der Informationsentropie korrespondiert mit einer Umwandlung eines Teils der Energie der gerichteten Bewegung der Teilchen in ihren selbstkonsistenten Feldern in ungerichtete Systemenergie. Diese Umwandlung von Nicht-Gleichgewichtsenergie in Gleichgewichtsenergie ist kollektive Dissipation im Sinne der statistischen Mechanik (z.B. Balescu 1975). (Da wir uns mit energetisch abgeschlossenen Systemen beschäftigen, werden wir "Dissipation" immer im Sinne von Energieumwandlung und nicht im Sinne von Energieverlust verwenden.)

Die Bedeutung dieses Dissipationsprozesses wurde schon durch sehr frühe numerische Simulationen erkannt (Hénon 1964). Die erste analytische Arbeit zu diesem Relaxationsprozeß stammt von Lynden-Bell (1967). Unter der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit aller mikroskopischen Zustände und unter Berücksichtigung der Erhaltung der Werte der exakten Verteilungsfunktion wird dabei eine makroskopische "stoßfreie Entropie" abgeleitet. Durch Aufsuchen der stationären Punkte

der "stoßfreien Entropie" unter den Nebenbedingungen der Massen- und Energieerhaltung, sucht man dann die wahrscheinlichsten Endzustände auf großen Skalen zu berechnen. Allerdings hat die Euler-Lagrange-Gleichung zur Berechnung der stationären Punkte der Entropie unter den Nebenbedingungen endlicher Energie und endlicher Masse keine Lösung, außer für ganz bestimmte Kombinationen von Masse, Energie und Werten der Anfangsverteilung (Wiechen 1989). Eine Behandlung stoßfrei selbstgravitierender Systeme im Rahmen der Theorie von Wiechen et al. (1988) zeigt, daß diese Kombinationen nur dann auftreten können, wenn der Anfangszustand bereits ein stoßfrei global stabiles Gleichgewicht ist. Ähnliches gilt auch für alle Ansätze, die auf der Variation von Funktionalen der Form

$$H(f) = - \int C(f) d^3r d^3v, \quad (1.3)$$

mit f als normierte Einteilchen-Verteilungsfunktion und $C(f)$ als beliebige konvexe Funktion mit $C(0) = 0$, unter Massen- und Energieerhaltung, beruhen (Wiechen 1989). Aus diesen und ähnlichen Ansätzen (z.B. Shu 1978) erhält man deshalb nur dann Endgleichgewichte endlicher Masse und Energie, wenn man weitere ad hoc Annahmen, wie etwa einen festen, vorgegebenen Radius des Endgleichgewichtes (der eigentlich zu berechnen wäre), hinzufügt.

Neben diesen grundsätzlichen Schwierigkeiten zeigen zahlreiche numerische Simulationen stoßfrei selbstgravitierender Systeme (z.B. Shlosman et al. 1979, Hoffman et al. 1979, van Albada 1982, May & van Albada 1984, Tanckusa 1987) zwar die Bedeutung stoßfreier Relaxation, jedoch weisen die Endzustände aus den numerischen Simulationen im allgemeinen deutlich andere Abhängigkeiten auf, als dies aus den Theorien von Lynden-Bell (1967) und Shu (1978) erwartet werden kann. Die Autoren weisen darauf hin, daß ihre Endzustände stärker von den Anfangsbedingungen abhängen, also ein substantielles Gedächtnis an die Anfangsverteilung im Laufe der dynamischen Relaxation erhalten bleibt.

Es sind etliche Anstrengungen unternommen worden, diese Inkonsistenzen zu verstehen und auszuräumen. Richstone & Tremaine (1988) haben Zustände maximaler entropieähnlicher Funktionale unter der Nebenbedingung von ad hoc angenommenen Ortsraumdichteprofilen berechnet. Andere Ansätze (Dejonghe 1987) basieren auf dem allgemeineren Konzept der Jaynes Entropie (eine Entropie unter Berücksichtigung von a priori Kenntnissen). Tremaine et al. (1986) und Matur (1988) beschäftigen sich mit dem mischenden Charakter stoßfreier Relaxation (siehe auch Kapitel 3.1) und den daraus resultierenden Konsequenzen für mögliche Gleichgewichte auf großen Skalen. Allen diesen Ansätzen ist die Idee, die Entropie oder entropieartige Funktionale unter geeigneten Nebenbedingungen zu maximieren, gemeinsam.

Aufgrund der beschriebenen Schwierigkeiten wollen wir einen grundsätzlich anderen Zugang zur Behandlung stoßfrei relaxierender selbstgravitierender Materie wählen. Aufbauend auf der Arbeit von Wiechen et al. (1988) verfolgen wir dabei die Idee, daß die Stärke des Relaxationsprozesses von der zur dissipativen Umsetzung freien Energie abhängen sollte. Wiechen et al. (1988) haben gezeigt, daß zu jedem Anfangszustand ein "assoziertes Gleichgewicht" existiert. Dies ist, im Falle verschwindenden Gesamtdrehimpulses, der Zustand niedrigster Energie, der ausgehend von einem Anfangszustand f_0 durch inkompressible Abbildungen im Phasenraum erreicht werden kann. Die für diese Arbeit wesentlichen Ergebnisse dieses Konzeptes werden in Kapitel 2 erläutert. Die Differenz zwischen der Energie des assoziierten Gleichgewichtes und der Energie des Anfangszustandes ist die zur dissipativen Umsetzung freie Energie. Ist ein Anfangszustand in diesem Sinne nahe seinem (global stabilen) assoziierten Gleichgewicht, so sollten die Effekte stoßfreier Relaxation keine wesentliche Rolle spielen. Ein Endzustand auf großen Skalen sollte in diesem Falle praktisch die gesamte Information des Anfangszustandes enthalten. Ist hingegen sehr viel Energie dissipativ umzusetzen, so sollte der Endzustand auf großen Skalen weit

weniger von den Details der Anfangsverteilung abhängen, denn zur Umsetzung der Energie wird eine erhebliche Erhöhung der Informationsentropie erforderlich sein.

Die Information über die zur dissipativen Umsetzung freie Energie soll im folgenden genutzt werden, um, ausgehend von wenigen Grundannahmen, ein realistisches Modell für die stoßfreie Relaxation selbstgravitierender Materie zu entwickeln. In Kapitel 3.1 wird beschrieben, wie der Übergang von der exakten (mikroskopischen) Theorie zu einer makroskopischen Beschreibungsweise und der Übergang von einem beliebigen Anfangszustand zu einem Endgleichgewicht auf großen Skalen, unter Berücksichtigung der exakten, stoßfreien Dynamik auf kleinen Skalen, durchgeführt werden kann. Da bei einer solchen Behandlungsweise nur sehr wenige dynamische Aspekte berücksichtigt werden können und sollen, ist dieser Übergang nicht eindeutig. Dieser Gesichtspunkt wird in Kapitel 3.2 diskutiert. Zur Prüfung der Realitätsnähe unseres Modells haben wir vergleichende dynamische Rechnungen durchgeführt (Kapitel 4). Dabei verwenden wir eine Methode von Klimas (1987) die eine notwendig grobskalige, numerische Behandlung der Dynamik mit kontrolliertem Informationsverlust erlaubt. Anhand der Beispiele diskutieren wir den Einfluß der Anfangsbedingungen auf die Endverteilungen im Rahmen des Modells und der dynamischen Rechnungen. Da es uns in erster Linie auf die prinzipielle Entwicklung eines realistischen Relaxationsmodelles ankommt, wird im wesentlichen nur der einfachere Fall verschwindenden Gesamtdrehimpulses behandelt. In Kapitel 5 sprechen wir jedoch auch einige Aspekte des Falles endlichen Gesamtdrehimpulses der Systeme an.

2. Das Konzept

In diesem Kapitel sollen die Annahmen, die Grundlagen, sowie ein anschauliches Szenario für die Konstruktion einer Modellrelaxation erläutert werden. Wir greifen dabei im wesentlichen auf Ergebnisse von Wiechen et al. (1988) zurück, wobei wir die Ergebnisse (ohne Beweise) aber nur soweit zitieren, wie sie zum Verständnis der weiteren Arbeit notwendig sind.

Wir betrachten stoßfrei selbstgravitierende Systeme, die wir als vollständig isoliert ansehen wollen. Prozesse, die Masse oder Energie der Systeme ändern können, sollen deshalb abgeschlossen sein. Wir nehmen dabei weiter an, daß die Dynamik der Systeme mit Hilfe der klassischen Newtonschen Mechanik beschrieben werden kann. Bezeichnen wir mit $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ die Einteilchen-Massenverteilungsfunktion im Phasenraum (μ -Raum), so wird die Dynamik vollständig durch die stoßfreie Boltzmann-Gleichung zusammen mit der Poisson-Gleichung bestimmt (siehe z.B. Friedman & Polyachenko 1984, Braun & Hepp 1977, Narnhofer & Sewell 1981). Es gilt also

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \nabla \psi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (2.1)$$

wobei das Gravitationspotential $\psi(\vec{r}, t)$ selbstkonsistent aus der Poisson-Gleichung zu bestimmen ist.

$$\Delta \psi(\vec{r}, t) = 4\pi G \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.2)$$

G bezeichnet hierbei die Gravitationskonstante und wir nehmen an, daß ψ wie $-1/|\vec{r}|$ im Unendlichen verschwindet. Falls nichts anderes gesagt wird, sind die Integrationen immer über den ganzen betrachteten Raum zu erstrecken. Das Gleichungssystem aus den Gleichungen (2.1) und (2.2) wollen wir im folgenden kurz mit (BPS) (für Boltzmann-Poisson-System) bezeichnen. Wir wählen nun einen Anfangszustand zur Zeit t_0

$$f_0(\vec{r}, \vec{v}) = f(\vec{r}, \vec{v}, t_0), \quad (2.3)$$

der energetisch gebunden sei und von dem wir zunächst (in diesem Kapitel und in den Kapiteln 3 und 4) annehmen wollen, er habe keinen Gesamtdrehimpuls. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei auch der gesamte lineare Impuls zu Null gesetzt. Wir verlangen weiter, daß f_0 nach oben beschränkt ist (keine singulären Anfangsbedingungen) und aus Gründen einer vereinfachten Argumentation außerdem, daß $f_0(\vec{r}, \vec{v}) \neq 0$ nur auf einem beschränkten Gebiet des Phasenraumes erfüllt ist (kompakter Träger für f_0).

In der durch das (BPS) beschriebenen exakten, stoßfreien Dynamik sind insbesondere die Gesamtmasse, die Gesamtenergie, der gesamte lineare Impuls, der Gesamtdrehimpuls und die Entropie S Erhaltungsgrößen. Darüber hinaus gilt sogar, daß nur solche Änderungen von f mit t möglich sind, die durch eine im Phasenraum inkompressible Abbildung aus f_0 erzeugt werden können. Diese Eigenschaft wollen wir im folgenden kurz Phasenvolumenerhaltung nennen. Sie kann durch eine monoton fallende Funktion $g(\varphi)$ beschrieben werden. Ist $\varphi(g)$ dasjenige Phasenvolumen zu Werten von f_0 mit $f_0 \geq g$, also

$$\varphi(g) = \int \Theta(f_0(\xi) - g) d\xi \quad (2.4)$$

mit

$$\xi = (\vec{r}, \vec{v}) \quad d\xi = d^3r d^3v$$

und Θ als Einheits-Stufenfunktion, so erhält man $g(\varphi)$ als Umkehrfunktion von (2.4), denn nach Konstruktion ist $\varphi(g)$ monoton. $g(\varphi)$ wollen wir suggestiv Gedächtnisfunktion nennen, denn sie ist Konstante der Bewegung des (BPS) und beschreibt insofern die Erinnerung einer Verteilungsfunktion $f(\vec{r}, \vec{v}, t > t_0)$ an ihren Anfangszustand $f_0(\vec{r}, \vec{v})$, die nur in der exakten, stoßfreien Dynamik erhalten bleibt. Die Eigenschaft der Phasenvolumenerhaltung des (BPS), zusammen mit der Energieerhaltung ist auch dafür verantwortlich, daß stoßfrei gravitierende Systeme i.a. nicht in ein exaktes Gleichgewicht relaxieren können.

Da die Stärke einer stoßfreien dynamischen Relaxation auf großen Skalen und damit auch der Informationsverlust auf großen Skalen von der zur dissipativen Umsetzung freien Energie abhängen sollte, besteht der erste wichtige Schritt hin zu einer realistischen Modellrelaxation darin, diese Energie zu berechnen. Im Falle eines eindimensionalen, gedämpften Oszillators mit einem Potential $V(x)$, das ein absolutes Minimum besitzt, ist die Frage nach der zur Dissipation freien Energie einfach zu beantworten (siehe Abbildung 2.1).

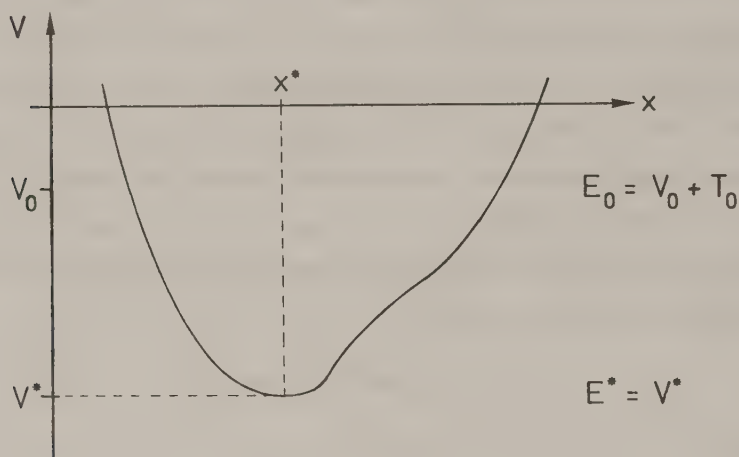


Abb. 2.1 Potential eines eindimensionalen Oszillators.

Der Zustand niedrigster Energie wird durch $E^* = V^* = V(x^*)$, mit x^* als Stelle des absoluten Minimums der potentiellen Energie, bestimmt. Der Zustand niedrigster Energie ist dabei global stabil und $\Delta E = E_0 - E^*$ ist die zur Dissipation freie Nicht- Gleichgewichtsenergie. Dieses Bild kann in großen Teilen auf unseren Fall eines Systems mit unendlich vielen Freiheitsgraden übertragen werden. Eine Aufspaltung der Energie in potentielle und kinetische Energie ist dabei aber ungeeignet, denn

die kinetische Energie eines stoßfrei selbstgravitierenden Systems verschwindet im Gleichgewicht nicht. Um eine analoge Aufspaltung in "verallgemeinerte potentielle" und "verallgemeinerte kinetische Energie" zu erhalten, schreiben wir die Gesamtenergie zunächst in der Form

$$E = \int h f(\xi) d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi)^2 d^3 r \quad (2.5)$$

mit

$$h = \frac{v^2}{2} + \psi$$

und betrachten sie formal als ein Funktional der Verteilungsfunktion f und des Gravitationspotentials ψ , also $E = E_{f,\psi}$. Eine verallgemeinerte potentielle Energie erhalten wir dann, indem wir E bezüglich f für festes ψ global minimieren. Die Klasse der Testfunktionen f muß dabei der Bedingung der Phasenvolumenerhaltung genügen. Bezeichnen wir mit Φ_{f_0} diejenige Klasse von Funktionen f , die durch eine inkompressible Abbildung im Phasenraum aus f_0 erzeugt werden können, so gilt

$$W_\psi = \min_{f \in \Phi_{f_0}} E_{f,\psi} = \int h f_\psi^*(\xi) d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi)^2 d^3 r. \quad (2.6)$$

Die minimierende Verteilungsfunktion f_ψ^* ist dabei durch

$$f_\psi^*(h_\psi(\varphi)) = g(\varphi) \quad (2.7)$$

oder

$$f_\psi^*(h) = g(\varphi_\psi(h)) \quad (2.8)$$

gegeben. Dabei ist $h_\psi(\varphi)$ die Inverse von

$$\varphi_\psi(h) = \int \Theta(h - h'(\xi)) d\xi. \quad (2.9)$$

Da $\varphi_\psi(h)$ dasjenige Phasenvolumen zu Werten der Energie pro Einheitsmasse $h' \leq h$ ist und $\varphi(g)$ dasjenige Phasenvolumen zu Werten von f mit $f \geq g$ ist, werden

durch diese, nach Konstruktion phasenvolumenerhaltende Abbildung, große Werte der Verteilungsfunktion kleinen Werten der Energie zugeordnet (und umgekehrt), so daß $f_\psi^*(h) = g(\varphi_\psi(h))$ im Sinne von Gleichung (2.6) minimiert (Schindler & Goldstein 1983, Wiechen et al. 1988). Schreibt man nun die Gesamtenergie als

$$E_0 = T_\psi + W_\psi \quad (2.10)$$

mit

$$T_\psi = \int h f(\xi) d\xi - \int h f_\psi^*(\xi) d\xi \geq 0, \quad (2.11)$$

so ist W_ψ die gesuchte verallgemeinerte potentielle Energie und T_ψ die gesuchte verallgemeinerte kinetische Energie, denn es gilt:

$$T_\psi \geq 0$$

$$T_\psi = 0 \quad \text{im Gleichgewicht}$$

Desweiteren verschwindet die erste Variation von W_ψ für stationäre Zustände und das Vorzeichen der zweiten Variation von W_ψ gibt Auskunft über die lokale Stabilität eines Gleichgewichtes (vorausgesetzt sie ist ungleich Null).

Der zweite Schritt zur Berechnung der Energie ΔE besteht nun, analog zum Falle des eindimensionalen Oszillators darin, den Zustand minimaler verallgemeinerter potentieller Energie zu finden. Da die verallgemeinerte potentielle Energie W_ψ gleichmäßig nach unten beschränkt ist (Wiechen et al. 1988) können wir i.a. von der Existenz eines solchen Zustandes ausgehen. Aus der gleichmäßigen Beschränktheit von W_ψ folgt auch sofort, daß stoßfrei selbstgravitierende Systeme, die sich gemäß dem (BPS) entwickeln, nicht (auch nicht in Teilen) auf eine Singularität kollabieren können, sofern die Anfangsverteilung f_0 nicht selbst schon singular ist. Aus einer Variation von W_ψ bezüglich ψ unter Berücksichtigung der Phasenvolumenerhaltung erhält man für die stationären Zustände ($\delta W_\psi = 0$) die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\Delta \tilde{\psi} = 4\pi G \int f_\psi^* \left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi} \right) d^3 v. \quad (2.12)$$

Die Lösung ψ^* von Gleichung (2.12), die W_ψ global minimiert, liefert dann den Zustand niedrigster Energie, der unter der Bedingung der Phasenvolumenerhaltung mit der Anfangsverteilung f_0 verträglich ist (Wiechen et al. 1988).

$$f_{\psi^*}^*(h) = g(\varphi_{\psi^*}(h)) \quad (2.13)$$

Diesen Zustand wollen wir als zum Anfangszustand assoziiertes Gleichgewicht bezeichnen. Er hat die gleiche Entropie aber niedrigere Energie als f_0 bzw. $f(\xi, t)$. Die Lösungen von Gleichung (2.12) sind in der Regel nicht analytisch angebar, denn es handelt sich um eine nichtlineare partielle Integrodifferentialgleichung, wobei ψ auf der rechten Seite von Gleichung (2.12) nicht nur im Argument von f^* auftaucht, sondern auch noch auf funktionale Weise über $\varphi_\psi(h)$ (siehe Gleichung (2.9)) eingeht. Da die global minimierenden Lösungen von (2.12) aber notwendig sphärisch symmetrisch sind (siehe z.B. Aly 1989), können sie relativ leicht, etwa durch eine numerische Picard-Iteration, berechnet werden. Die assoziierten Gleichgewichte sind stoßfrei global stabil im Sinne der Lyapunov Stabilität (z.B. Nicolis & Prigogine 1977, Haken 1983, Goldstein 1981), so daß die Analogie zum eindimensionalen Oszillator auch hier gegeben ist. An dieser Stelle wird klar, daß die zur dissipativen Umsetzung freie Energie gerade $\Delta E = E_0 - W_{\psi^*}$ ist, wobei E_0 die Gesamtenergie des Systems bezeichnet. Man kann nun auch einen strengen Abstandsbegriff zwischen zwei Zuständen mit Hilfe von ΔE und einer geeigneten trivialen Metrik (Grobmetrik) definieren (Wiechen 1989). Für unsere Zwecke reicht es jedoch, ΔE selbst anschaulich als Maß für den Abstand eines Zustandes von seinem assoziierten Gleichgewicht zu interpretieren.

Bis zu dieser Stelle konnten wir völlig analog zu dem Bild eines eindimensionalen Oszillators mit Reibung argumentieren. Mit Hilfe der verallgemeinerten potentiellen Energie war es möglich, einen phasenvolumenerhaltend zugänglichen, global stabilen Zustand niedrigster Energie $f_{\psi^*}^*$ zu konstruieren. Die zur dissipativen Umsetzung

freie Energie, die die Stärke des Relaxationsprozesses auf großen Skalen bestimmen sollte, ergab sich aus dem energetischen Unterschied dieses Zustandes zum Anfangszustand. Die dynamische Entwicklung des Systems gemäß dem (BPS) kann man sich also anschaulich als äußerst komplizierte Bewegung (im Raum der energie- und phasenvolumenerhaltend zugänglichen Zustände) um das assoziierte Gleichgewicht herum vorstellen. Nun bricht jedoch die Analogie zum eindimensionalen Oszillator zusammen, denn die Energieerhaltung hindert das System daran, den Zustand niedrigster Energie f_{ψ^*} anzunehmen. Die Nichtgleichgewichtsenergie kann nicht wie bei einem Oszillator mit Reibung an die Außenwelt abgegeben werden, um zu einem Gleichgewichtszustand zu kommen, sondern die Nichtgleichgewichtsenergie muß durch Phasenmischung umgewandelt werden, so daß das System auf großen Skalen nur noch Gleichgewichtsenergie hat. Dazu ist es notwendig, zu einer Beschreibung der Systeme auf großen (endlichen) Skalen überzugehen. Mit dieser makroskopischen Beschreibung der Systeme (durch gewollten Informationsverlust) wird Energiedissipation im Sinne von Energieumwandlung und Entropieerhöhung möglich, so daß ein System auf diesen Skalen (also im Mittel) in ein Gleichgewicht relaxieren kann. Es läßt sich nun folgendes anschauliche Szenario einer dynamischen Relaxation durch Phasenmischung entwerfen (siehe auch Abbildung (2.2)):

Zum Zeitpunkt $t = t_0$ befindet sich das System in einem Zustand f_0 . In der Regel wird dieser Zustand weit weg von seinem assoziierten Gleichgewicht sein, so daß ΔE groß ist. Dabei ist ΔE die dissipativ umzusetzende Energie und die Energie eines Zustandes niedrigster Energie gemäß Gleichung (2.13) besteht ausschließlich aus Gleichgewichtsenergie. Deshalb muß auch das Endgleichgewicht auf großen Skalen ein (anderer) Zustand niedrigster Energie sein. Das System bewegt sich nun um seinen Zustand niedrigster Energie, wobei die Energie ΔE in dieser "Nichtgleichgewichtsbewegung" enthalten ist. Mit der Zeit findet diese Nichtgleichgewichtsbewegung aber

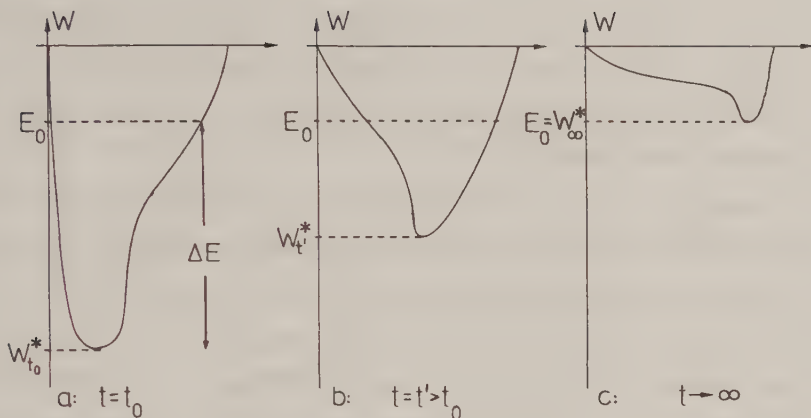


Abb. 2.2 Anschauliches Szenario einer stoßfreien dynamischen Relaxation im Potentialbild

auf immer kleineren Skalen statt (Lynden-Bell 1967), so daß auf großen Skalen betrachtet, Nichtgleichgewichtsenergie durch kollektive Dissipation in Gleichgewichtsenergie überführt wird. Die Entropie (als Maß für die Unkenntnis) erhöht sich, und die Energie der Nichtgleichgewichtsbewegung nimmt ab. Dies heißt aber, daß sich der energetische Abstand zum instantanen Zustand niedrigster Energie (auf großen Skalen) vermindert, indem die Energie dieses Zustandes wächst. Abbildung (2.2b) zeigt eine solche Momentaufnahme. Der Relaxationsprozeß geht nun solange weiter, bis die gesamte Nichtgleichgewichtsenergie ΔE in Gleichgewichtsenergie umgewandelt wurde. Der zeitasymptotische Zustand niedrigster Energie auf großen Skalen ist damit ein stoßfrei global stabiler Zustand der Energie E_0 , aber mit höherer Entropie als der Anfangszustand bzw. als der exakte zeitabhängige Zustand.

Sollte der Anfangszustand schon derart filamentiert sein, daß er auf großen Skalen betrachtet bereits ein Gleichgewicht ist (auf kleinen Skalen kein Gleichgewicht), so ist der Übergang von a nach c in Abbildung 2.2 natürlich nicht als zeitliche Entwicklung, sondern lediglich als ein Wechsel der Beschreibungsweise (mikroskopisch, makroskopisch) anzusehen.

Dieses Szenario ist natürlich sehr qualitativ und wird nicht in der Lage sein, etwa die zeitliche Entwicklung eines Systems quantitativ zu beschreiben. Es soll lediglich dazu dienen, eine grobe Vorstellung über den Relaxationsprozeß, in der von uns gewählten Terminologie, bei der der Gleichgewichts- und der Nichtgleichgewichtsaspekt eine entscheidende Rolle spielt, zu vermitteln. Wir werden zeigen, daß sich unter Verwendung der dargestellten grundlegenden Ergebnisse von Wiechen et al. (1988) wichtige Eigenschaften dieses Szenarios in ein quantitatives Modell zur Berechnung von Endzuständen auf großen Skalen fassen lassen.

3. Modellrelaxationen

3.1 Konstruktion von Modellrelaxationen

Die Aufgabe besteht nun darin, das in Kapitel 2 vorgestellte Konzept in ein Modell zu übertragen. Das Modell sollte es dabei ermöglichen, aus einer gegebenen Anfangsverteilung quantitativ realistische Endverteilungen zu berechnen, ohne die Dynamik des Systems behandeln zu müssen. Wir werden deshalb den Übergang von einer mikroskopischen (exakten) zu einer makroskopischen Beschreibung und den Übergang von einem Anfangszustand (i.a. fern von einem Gleichgewicht) zu einem Endgleichgewicht in einem Schritt vollziehen. Da die Dynamik eines Systems in einer solchen Behandlung nicht berücksichtigt werden soll und kann, kommen wir, ähnlich wie bei einer statistischen Behandlungsweise, nicht ohne a priori Annahmen über die Dynamik der Systeme aus. Unsere Beschreibungsweise trägt in diesem Sinne notwendig heuristische Züge.

Als Grundlage für eine weitere Diskussion wollen wir zunächst die Mindestanforderungen, die wir an unser Modell stellen wollen, zusammenfassen.

- (i) Da wir annehmen, daß die betrachteten Systeme vollständig isoliert sind, muß die Gesamtmasse M_0 bei der Relaxation in ein Gleichgewicht f_E auf großen Skalen erhalten bleiben.

$$\int \bar{f}_E(\xi) d\xi = \int f_0(\xi) d\xi = M_0 \quad (3.1)$$

- (ii) Aus dem gleichen Grunde kann sich die Gesamtenergie der Systeme nicht ändern.

$$\int \frac{v^2}{2} \bar{f}_E(\xi) d\xi - \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r = E_0 \quad (3.2)$$

(iii) Die zentrale Grundannahme des gesamten Konzeptes ist es, daß die Systeme auf großen Skalen tatsächlich einem Gleichgewichtszustand zustreben. Diese Annahme ist, zumindest für generische Anfangsbedingungen, physikalisch plausibel (Lynden-Bell 1967) und zudem durch viele Simulationsrechnungen belegt (siehe Zitate aus Kapitel 1). Da wir über die Einzelheiten der Dynamik nicht viel wissen (es sei denn, wir berechnen sie), wollen wir darüber hinaus annehmen, daß die Systeme auf großen Skalen einem stoßfrei global stabilen Gleichgewicht zustreben, da nur dann eine weitere stoßfreie Relaxation in jedem Falle ausgeschlossen werden kann. Diese Annahme bedeutet, daß die Dynamik der Systeme hinreichend heftig sein muß, so daß man das Einlaufen eines Systems in einen nur lokal stabilen Gleichgewichtszustand ausschließen kann. Anders ausgedrückt gehen wir also davon aus, daß der "stabilste Zustand" auch der wahrscheinlichste ist. In der Terminologie von Kapitel 2 heißt dies, daß die gesamte Nichtgleichgewichtsenergie eines Systems, nämlich ΔE , in Gleichgewichtsenergie umgesetzt werden muß. Deshalb wird die Stärke der Relaxation direkt von ΔE abhängen müssen. Insbesondere darf keine Relaxation auftreten, falls $\Delta E = 0$ gilt (siehe auch Diskussion in Kapitel 1).

(iv) Die Modellrelaxation soll den Übergang von einer exakten, stoßfreien und damit entropieerhaltenden Dynamik zu einem Gleichgewicht auf großen Skalen beschreiben. Dabei muß Information verloren gehen und damit die Entropie erhöht werden

$$S_E \geq S_0, \quad (3.3)$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn der Anfangszustand bereits ein Zustand niedrigster Energie ist. Andererseits muß der Endzustand $\bar{f}_E$ einer Modellrelaxation einer exakten Verteilungsfunktion f entsprechen, wobei lediglich zeitliche Variationen, die auf kleinen Skalen ablaufen, unaufgelöst

bleiben. Zum Beispiel muß deshalb sichergestellt sein, daß das Maximum von $\bar{f}_E$ nur kleiner oder gleich dem Maximum von $f(\xi, t)$ sein kann. Entropieerhöhung auf großen Skalen bei exakter, stoßfreier Dynamik auf kleinen Skalen impliziert daher, daß die Modellrelaxation nur solche makroskopischen Verteilungsfunktionen $\bar{f}$ liefern sollte, die das Resultat eines auf f angewandten, masseerhaltenden Mittelungsprozesses sein können. Also

$$\bar{f}(\xi) = \langle f \rangle(\xi) = \int f(\xi') w(\xi, \xi') d\xi' , \quad (3.4)$$

mit $w(\xi, \xi') \geq 0$ und

$$\int w(\xi, \xi') d\xi' = \int w(\xi, \xi') d\xi = 1 . \quad (3.6)$$

Um die Konsequenzen von Anforderung (iv) aufzuzeigen, betrachten wir Funktionale der Form

$$H(f) = - \int C(f) d\xi , \quad (3.7)$$

wobei f geeignet normiert sei und $C(f)$ eine beliebige konvexe Funktion von f mit $C(0) = 0$ sei. Zum Beispiel: Für

$$C(f) = f \ln f \quad (3.8)$$

ist H die Boltzmann-Entropie. Für den Fall, daß die Anfangsverteilung f_0 nur die Werte η oder 0 hat, erhält man mit dem Ausdruck

$$C(f) = f \ln f + (\eta - f) \ln(\eta - f) - \eta \ln \eta \quad (3.9)$$

die Lynden-Bell Entropie (1967). Aufgrund der Konvexität von C

$$C\left(\frac{\sum p_i f_i}{\sum p_i}\right) \leq \frac{\sum p_i C(f_i)}{\sum p_i} \quad \forall p_i, f_i \text{ positiv} \quad (3.10)$$

erhalten wir mit der Jensenschen Ungleichung (siehe z.B. Hardy et al. 1952) sofort die Abschätzung

$$\langle C(f) \rangle \geq C(\langle f \rangle). \quad (3.11)$$

Da wir nur Mittelungsprozesse behandeln, die gemäß Gleichung (3.6) das nullte Moment erhalten, gilt

$$H(\langle f \rangle) \geq H(f) \quad (3.12)$$

für beliebige Funktionale H des Typs (3.7). Dies ist gerade die Mischungsbedingung im Sinne von Wehrl (1978). Damit bedeutet Bedingung (iv) also, daß eine Modellrelaxation nur solche Endgleichgewichte liefern darf, bei denen für alle Funktionale H des Typs (3.7)

$$H(\bar{f}_E) \geq H(f(\xi, t)) = H(f_0) \quad (3.13)$$

sichergestellt ist. Ist Ungleichung (3.13) erfüllt, so ergibt sich z.B. die Entropieerhöhung als Spezialfall.

Nachdem wir die an eine Modellrelaxation zu stellenden Bedingungen zusammengestellt und diskutiert haben, wollen wir uns nun den Informationen aus Kapitel 2 zuwenden, die für die Konstruktion eines solchen Modells nützlich sind. Die wichtigste Information ist dabei die Funktion $g(\varphi)$, die das Gedächtnis an die Anfangsverteilung f_0 enthält, welches nur in der exakten, stoßfreien Dynamik erhalten wird. Dabei wissen wir, daß das assoziierte Gleichgewicht, also das phasenvolumenerhaltend zugängliche global stabile Gleichgewicht, nur von $g(\varphi)$ über $f_{\psi^*}^*(h) = g(\varphi_{\psi^*})$ abhängt, wobei ψ^* diejenige Lösung von Gleichung (2.12) ist, die das absolute Minimum von W_ψ liefert. Auch die verallgemeinerte potentielle Energie W_ψ selbst hängt deshalb, außer von ψ , von der Verteilungsfunktion f nur über $g(\varphi)$ ab. Mit einer Variablentransformation läßt sich W_ψ als

$$W_\psi = \int h_\psi g(\varphi) d\varphi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r \quad (3.14)$$

schreiben. Außerdem kann man in den Funktionalen der Form (3.7) f durch eine Variablentransformation ebenfalls durch $g(\varphi)$ ersetzen.

$$H(f) = - \int C(g(\varphi)) d\varphi \quad (3.15)$$

Letztlich wird also ein stoßfrei global stabiles Gleichgewicht allein durch $g(\varphi)$ bestimmt.

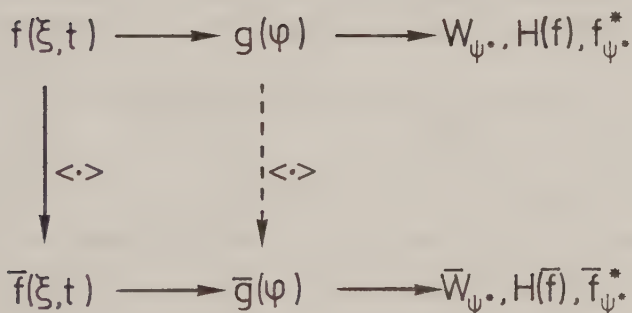


Abb. 3.1 Schema der Idee zur Konstruktion einer Modellrelaxation

Diese Betrachtungsweise legt die in Abbildung 3.1 skizzierte Idee für die Konstruktion einer Modellrelaxation nahe. Wir mitteln nicht die Verteilungsfunktion $f(\xi, t)$ im Phasenraum, sondern beschreiben den Verlust an Information, der nötig ist, um zu einem Gleichgewicht auf großen Skalen zu kommen, durch einen auf $g(\varphi)$ wirkenden Mittelungsprozeß. Denn während die Verteilungsfunktion $f(\xi, t)$ im Laufe ihrer dynamischen Entwicklung unbekannt ist (es sei denn, wir berechnen sie explizit), ist $g(\varphi)$, als Konstante der Bewegung der exakten Dynamik, zu allen Zeiten bekannt.

Aufgrund der beschriebenen Abhängigkeiten eines global stabilen Gleichgewichtes, kann man dann den Endgleichgewichtszustand auf großen Skalen als ein zu einem geeignet reduzierten Gedächtnis $\bar{g}(\varphi)$ gehörendes, assoziiertes Gleichgewicht berechnen. Dabei wird die Stärke des auf $g(\varphi)$ wirkenden Mittelungsprozesses durch die Energie ΔE , die in Gleichgewichtsenergie umgewandelt werden muß, bestimmt. Der durch die Mittelung von $g(\varphi)$ bedingte Informationsverlust muß sich nämlich wegen Bedingung (ii) gerade so auswirken, daß die Energie des zum reduzierten Gedächtnis $\bar{g}(\varphi)$ gehörenden assoziierten Gleichgewichtes gleich E_0 ist. Da die Energie eines assoziierten Gleichgewichtes nach Konstruktion lediglich aus Gleichgewichtsenergie besteht, wird Bedingung (iii) automatisch erfüllt.

Bevor die Modellrelaxation gemäß dieser Idee formuliert werden kann, sind noch zwei wesentliche Fragen zu klären:

- a) Wie kann sichergestellt werden, daß auch Bedingung (iv) und insbesondere die Ungleichung (3.13) durch den Mittelungsprozeß auf $g(\varphi)$ erfüllt werden ?
- b) Ist die Annahme, daß eine Reduktion des Gedächtnisses an die Anfangsverteilung ($g(\varphi) \mapsto \bar{g}(\varphi)$) zu einer Erhöhung der Gleichgewichtsenergie führt gerechtfertigt, oder kann auch der umgekehrte Fall eintreten, so daß das Konzept unserer Modellrelaxation versagt ?

Frage a) kann mit Hilfe des Mischungskriteriums (3.13) in der vorgestellten Form natürlich kaum beantwortet werden, da ein Test von (3.13) für alle Funktionale der Form (3.7) nicht durchführbar ist. Es existiert aber eine zu (3.13) äquivalente Formulierung der Mischungsbedingung, die unseren Zwecken sehr entgegenkommt (siehe z.B. Tremaine et al. 1986). Bevor wir dieses Mischungstheorem in unserer Notation angeben, sei die Mischungsbedingung noch einmal genauer formuliert:

Definition:

Haben zwei Verteilungsfunktionen $f_1(\xi)$ und $f_2(\xi)$ die gleiche Masse, so ist f_2 mehr gemischt als f_1 , falls

$$H(f_2) \geq H(f_1) \quad (3.16)$$

für alle Funktionale H der Form (3.7) gilt.

Mischungs-Theorem (analog zu Hardy et al. 1952 (Theorem 108), siehe auch Tremaine et al. 1986)

Eine Verteilungsfunktion $f_2(\xi)$ ist dann und nur dann mehr gemischt als eine Verteilungsfunktion $f_1(\xi)$ (gleicher Masse), falls für die zugehörigen Gedächtnisfunktionen

$$\int_0^\varphi g_2(\varphi') d\varphi' \leq \int_0^\varphi g_1(\varphi') d\varphi' \quad \forall \varphi \quad (3.17)$$

gilt.

Beweis:

a) Sei f_2 mehr gemischt als f_1 . Sei weiter $\tilde{\varphi} \in \varphi$ irgendein Phasenvolumen und $\tilde{g} = g_1(\tilde{\varphi})$, so ist

$$C(f) = \begin{cases} 0 & \text{für } f \leq \tilde{g} \\ f - \tilde{g} & \text{für } f > \tilde{g} \end{cases} \quad (3.18)$$

eine konvexe Funktion von f . Damit ist

$$\begin{aligned} H(f_1) &= - \int C(f_1) d\xi \\ &= - \int_0^{\tilde{\varphi}} (g_1(\varphi) - \tilde{g}) d\varphi \\ &= - \int_0^{\tilde{\varphi}} g_1(\varphi) d\varphi + \tilde{g}\tilde{\varphi} \end{aligned} \quad (3.19)$$

und

$$\begin{aligned} H(f_2) &= - \int C(f_2) d\xi \\ &= - \int_0^{\tilde{\varphi}} C(g_2(\varphi)) d\varphi - \int_{\tilde{\varphi}}^{\infty} C(g_2(\varphi)) d\varphi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mit $C(g) \geq 0$ und $C(g) \geq g - \tilde{g}$ gilt die Abschätzung

$$H(f_2) \leq - \int_0^{\tilde{\varphi}} g_2(\varphi) - \tilde{g} \, d\varphi = - \int_0^{\tilde{\varphi}} g_2(\varphi) \, d\varphi + \tilde{g}\tilde{\varphi} \quad (3.21)$$

und somit gilt (3.17), da $\tilde{\varphi}$ beliebig gewählt war.

b) Gilt andererseits (3.17), so ist

$$\begin{aligned} H(f_2) - H(f_1) &= \int C(f_1) - C(f_2) \, d\xi \\ &= \int_0^\infty C(g_1(\varphi)) - C(g_2(\varphi)) \, d\varphi. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, C sei zweimal stetig differenzierbar (sonst gilt eine ähnliche, aber kompliziertere Argumentation). Damit gilt mit der Annahme (3.17) und aufgrund der Konvexität von C

$$\begin{aligned} H(f_2) - H(f_1) &\geq \int_0^\infty (g_1(\varphi) - g_2(\varphi)) \frac{\partial C(g_2(\varphi))}{\partial g_2} \, d\varphi \\ &= (M_1(\varphi) - M_2(\varphi)) \frac{\partial C(g_2(\varphi))}{\partial g_2} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\infty} \\ &\quad - \int_0^\infty (M_1(\varphi) - M_2(\varphi)) \frac{\partial^2 C(g_2(\varphi))}{\partial g_2^2} \frac{\partial g_2(\varphi)}{\partial \varphi} \, d\varphi, \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit

$$M(\varphi) = \int_0^\varphi g(\varphi') \, d\varphi' \quad (3.33)$$

als der Masse innerhalb des Phasenvolumens φ . Der erste Summand auf der rechten Seite von (3.32) verschwindet, da $M_1(0) = M_2(0) = 0$ und $M_1(\infty) = M_2(\infty) = M_0$. Da nach Voraussetzung $M_1(\varphi) \leq M_2(\varphi)$ ist, $\partial^2 C / \partial g^2 \geq 0$ auf Grund der Konvexität von C ist und $\partial g / \partial \varphi$ nach Konstruktion kleiner oder gleich Null ist (siehe Gleichung (2.4)), ist der zweite Summand auf der rechten Seite von (3.23) nicht negativ, und es gilt

$$H(f_2) \geq H(f_1). \quad (q.e.d.)$$

Dies heißt also, daß wir zur Erfüllung der Mischungsbedingung (iv) die auf $g(\varphi)$ wirkenden Mittelungsoperatoren so wählen müssen, daß bei größer werdender Mittelungsskala (3.16) erfüllt ist. Dies ist mit der Formulierung (3.17) leicht zu berücksichtigen und schränkt zudem die Klasse der "erlaubten" Operatoren zur Gedächtnisreduktion ein. Diese Einschränkung ist notwendig zur Beschreibung stoßfreier Relaxation. Durch sie werden z.B. stoßbedingte Kollapsphänomene ausgeschlossen, die ebenfalls entropieerhöhend sind. Durch die Beschränkung der möglichen Mittelungsoperatoren wird es auch möglich, die zweite noch offene Frage b) zu beantworten.

Satz

Seien f_1 und f_2 zwei Verteilungsfunktionen gleicher Masse. Ist f_2 mehr gemischt als f_1 , dann gilt für die zugehörigen assoziierten Gleichgewichte:

$$W_{\psi_1^*}(f_1) \leq W_{\psi_2^*}(f_2) \quad (3.34)$$

Beweis:

Nach (3.14) hängt die verallgemeinerte potentielle Energie W_ψ von f nur über $g(\varphi)$ ab. Seien g_1 und g_2 die zu f_1 bzw. f_2 gehörenden Gedächtnisfunktionen (nach(2.4)) und ψ ein festes aber beliebiges Potential, dann gilt:

$$\begin{aligned} W_\psi(g_2) - W_\psi(g_1) &= \int h_\psi(\varphi) g_2(\varphi) d\varphi - \int h_\psi(\varphi) g_1(\varphi) d\varphi \\ &= h_\psi(\varphi) M_2(\varphi) \Big|_0^\infty - \int \frac{dh_\psi(\varphi)}{d\varphi} M_2(\varphi) d\varphi \\ &\quad - h_\psi(\varphi) M_1(\varphi) \Big|_0^\infty + \int \frac{dh_\psi(\varphi)}{d\varphi} M_1(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (3.35)$$

mit der Definition von $M(\varphi)$ aus (3.33). Da wieder $M_1(0) = M_2(0) = 0$ und $M_1(\infty) = M_2(\infty) = M_0$ gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} W_\psi(g_2) - W_\psi(g_1) &= \int \frac{dh_\psi(\varphi)}{d\varphi} (M_1(\varphi) - M_2(\varphi)) d\varphi \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Denn nach Konstruktion ist $dh_\psi(\varphi)/d\varphi \geq 0$ (siehe Gleichung (2.9)) und $M_1(\varphi) - M_2(\varphi) \geq 0$ gilt nach der Mischungsvoraussetzung gemäß (3.17). Da (3.36) für jedes feste aber beliebige ψ gilt, ist die Ungleichung auch für die globalen Minima von $W_\psi(g_1)$ bzw. $W_\psi(g_2)$ erfüllt, wobei die minimierenden Potentiale ψ_1^* bzw. ψ_2^* im allgemeinen unterschiedlich sind (siehe auch Abb. 3.2).

(q.e.d)

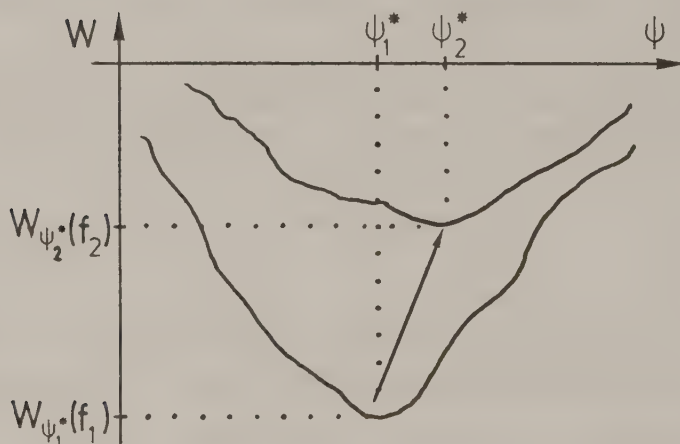


Abb. 3.2 Schematische Darstellung der Wirkung von Mischung auf die verallgemeinerten potentiellen Energien

Dieses Ergebnis bedeutet also, daß Mischung immer zu einer energetischen Anhebung des assoziierten Gleichgewichts führt. Damit ist sichergestellt, daß bei einer geeigneten Mittelung von $g(\varphi)$ die Energie des Endzustandes unserer Modellrelaxation E_0 betragen kann. Da Mischung wegen (3.7) auch eine Entropieerhöhung mit sich bringt, kann man also sagen, daß mit einer Entropieerhöhung gemäß (3.16) immer

auch eine Energieerhöhung des zugehörigen assoziierten Gleichgewichtes einhergeht, so daß die spezifische Wärme für global stabile Gleichgewichte immer positiv ist.

Nach diesen Vorüberlegungen können wir die Modellrelaxationen wie folgt konstruieren:

Wir wählen eine Klasse von Mittelungsoperatoren $\{F_\alpha\}$, wobei α einen freien Parameter für die Mittelungsskala darstellt. Dabei seien die Mittelungsoperatoren normiert, so daß bei ihrer Anwendung auf $g(\varphi)$

$$g(\varphi) \longrightarrow \bar{g}_\alpha(\varphi) = F_\alpha * g(\varphi) \quad (3.37)$$

die Gesamtmasse M_0 erhalten bleibt (wegen Bedingung i))

$$\int (F_\alpha * g)(\varphi) d\varphi = \int g(\varphi) d\varphi = M_0. \quad (3.38)$$

Weiterhin seien die Operatoren bezüglich der Mischungsbedingung (3.17) stetig und monoton in α . Das heißt für zwei Mittelungsskalen $\alpha_2 \geq \alpha_1$ und fester Operatorklasse gelte

$$\int_0^\varphi (F_{\alpha_2} * g)(\varphi') d\varphi' \leq \int_0^\varphi (F_{\alpha_1} * g)(\varphi') d\varphi' \quad (3.39)$$

für alle φ . Damit wird einerseits Bedingung iv) erfüllt und andererseits gilt

$$W_{\psi_2^*}(\bar{g}_{\alpha_2}) \geq W_{\psi_1^*}(\bar{g}_{\alpha_1}). \quad (3.40)$$

Die gewählte Klasse von Operatoren F_α enthalte die Identität für ein α . Dies ist insbesondere für den Fall notwendig, bei dem der Anfangszustand f_0 bereits ein global stabiles Gleichgewicht ist und somit keine Relaxation stattfinden kann.

Bei der Anwendung einer so definierten Klasse von Operatoren auf die Gedächtnisfunktion an den Anfangszustand $g(\varphi)$ ändert sich die verallgemeinerte potentielle Energie gemäß

$$W_\psi \longrightarrow W_\psi^\alpha = \int h_\psi(\varphi) \bar{g}_\alpha(\varphi) d\varphi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r. \quad (3.41)$$

Die "richtige" Mittelungsskala α_f zur Erreichung eines global stabilen Gleichgewichtes auf großen Skalen wird nun durch die zur dissipativen Umsetzung freie Energie ΔE bestimmt. Wir finden sie durch die Bedingung

$$W_{\psi^*}^{\alpha_f} = E_0, \quad (3.42)$$

mit $W_{\psi^*}^{\alpha_f}$ als absolutes Minimum der zu $\bar{g}_{\alpha_f}$ gehörenden verallgemeinerten potentiellen Energie. Dabei ist ψ^* Lösung von

$$\Delta\psi^* = 4\pi G \int \bar{f}_f(h) d^3v \quad (3.43)$$

mit $\bar{f}_f(h) = \bar{g}_{\alpha_f}(\varphi_{\psi^*}(h))$.

Das Endgleichgewicht kann damit in der Tat als assoziiertes Gleichgewicht zu einer geeignet reduzierten Gedächtnisfunktion konstruiert werden. Wegen (3.38) bleibt dabei die Gesamtmasse erhalten (Bedingung (i)). Das System hat die Energie E_0 , die aufgrund von (3.34) erreichbar wird, so daß Bedingung (ii) erfüllt ist. Nach Konstruktion handelt es sich bei dem Endgleichgewicht um einen global stabilen Zustand, so daß die Energie ΔE vollständig in Gleichgewichtsenergie überführt wurde. Die Stärke der Relaxation (d.h. das Maß an Mischung) wird dabei von ΔE bestimmt, denn durch die Bedingung, daß die Operatoren aus $\{F_\alpha\}$ stetig und monoton in α sind, sowie die Identität enthalten, ist sichergestellt, daß $g(\varphi)$ nicht zuerst eine vollständige Umverteilung erleidet, um erst dann so reduziert zu werden, daß sich ein Gleichgewicht einstellt. Dies würde auch unserem Konzept widersprechen, daß Anfangszustände nahe einem global stabilen Gleichgewicht nur wenig Information im Laufe der Relaxation verlieren sollten. Aufgrund von Bedingung (3.39) ist Mischung und damit Entropieerhöhung gewährleistet, so daß auch Bedingung (iv) erfüllt ist.

Wir haben damit die Modellrelaxation im Prinzip konstruiert. Sie basiert auf der grundsätzlichen Annahme einer Relaxation der Systeme in ein stoßfrei global stabiles

Gleichgewicht auf großen Skalen. Die Wahl der Klasse der Mittelungsoperatoren $\{F_\alpha\}$ ist dabei bis auf die genannten Einschränkungen noch frei. Sie entspricht einer weiteren Annahme über die Dynamik der Systeme. Da wir keine a priori Information über die "beste Wahl" von $\{F_\alpha\}$ haben, wollen wir diesen Punkt im nächsten Kapitel ausführlich behandeln.

3.2 Explizite Modellrelaxationen

Aufgrund der Mischungsbedingung entspricht einer Reduktion des Gedächtnisses an die Anfangsverteilung über eine Mittelung von $g(\varphi)$ immer eine Mittelung von $f(\xi, t)$ (siehe Gleichung (3.4)), wobei die Art dieser Mittelung von der unbekannten, i.a. kleinskaligen Struktur von $f(\xi, t)$ abhängt. Wählen wir umgekehrt eine feste Mittelungsvorschrift für $f(\xi, t)$ im Phasenraum ξ , so wird auch die beste Wahl der auf $g(\varphi)$ wirkenden Mittelungsoperatorklasse durch die Struktur von $f(\xi, t)$ bestimmt. Da wir aber keine Informationen über die Detailstruktur von f im Laufe der dynamischen Entwicklung, außer für den Fall $\Delta E = 0$, haben, wollen wir zwei extreme Situationen für die kleinskalige Struktur von $f(\xi, t)$ diskutieren. Aus einer Mittelung von f im Phasenraum läßt sich dann der entsprechende Mittelungsoperator für $g(\varphi)$ ableiten. Mit den so gewonnenen sehr unterschiedlichen Mittelungsoperatorklassen wollen wir dann, gemäß Kapitel 3.1, Endzustände auf großen Skalen berechnen, um die Abhängigkeiten der Endzustände von der Wahl der Operatorklasse diskutieren zu können.

Um einen einfachen Vergleich zu ermöglichen, wählen wir zwei Verteilungsfunktionen $f_a(\xi), f_b(\xi)$ so, daß die entsprechenden Gedächtnisfunktionen gleich sind $g_a(\varphi) = g_b(\varphi) = g_0(\varphi)$.

Die beiden Verteilungsfunktionen sind in Abbildung 3.3 symbolisch als $f(\xi)$ dargestellt. Im Falle a) hat $f(\xi)$ eine stark oszillatorische Struktur mit Maxima kleinen Phasenvolumens δ , die weit verteilt im Phasenraum liegen. Im Falle b) ist $f(\xi)$ eine Stufenfunktion im Phasenraum und hat keine weitere Struktur. Auch die Mittelungsvorschrift für $f_{a,b}$ im Phasenraum sei denkbar einfach. $\langle f \rangle(\xi)$ soll der Mittelwert von f in einem Bereich $\Omega(\xi)$ um ξ sein

$$\langle f \rangle(\xi) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Omega(\xi)} f(\xi') d\xi', \quad (3.44)$$

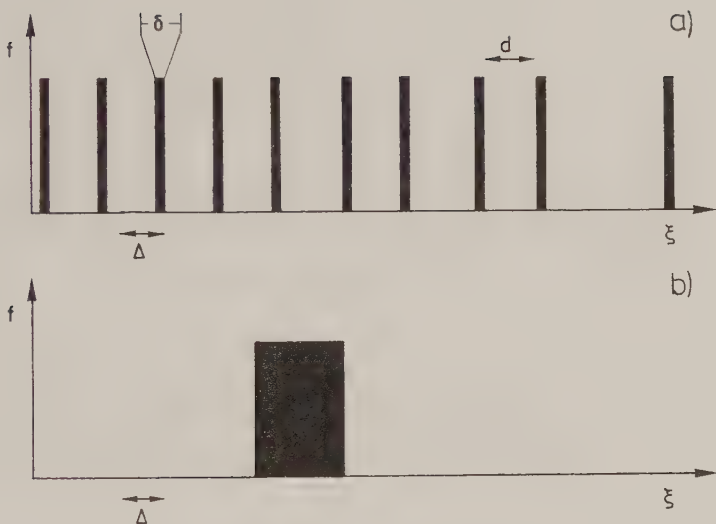


Abb. 3.3 Symbolische Darstellung zweier verschiedener Verteilungsfunktionen $f_{a,b}(\xi)$ zu gleichen Gedächtnisfunktion $g(\varphi)$. Δ bezeichnet eine Mittelungsskala im μ -Raum. In a) bezeichnet d den typischen Abstand zweier Peaks der kleinen Skala δ .

mit

$$\int \Omega(\xi) d\xi = \Delta.$$

Die Situation von Abbildung 3.3 a) ($\Delta \gg \delta$) und $d > \Delta$ entspricht dem nicht-entarteten Grenzfall in der Terminologie von Lynden-Bell (1967). In jeder Makrozelle des Volumens Δ befindet sich maximal eine belegte Mikrozelle des Volumens δ mit $\Delta \gg \delta$. Umgekehrt entspricht die Situation in Abbildung 3.3 b) dem vollständig

entarteten Fall im Sinne von Lynden-Bell. Alle Makrozellen Δ sind (bis auf ein Randgebiet) vollständig belegt. Beide Extremfälle können leicht auf den Fall verschiedener Werte von $f(\xi)$ (bzw. eines Kontinuums von Werten) verallgemeinert werden. Dies führt jedoch nicht zu qualitativ anderen Mittelungsoperatoren auf $g(\varphi)$, so daß diese Erweiterung hier nicht weiter diskutiert wird. Aus $\langle f_{a,b} \rangle$ können nun die zugehörigen reduzierten Gedächtnisfunktionen $\bar{g}_{\alpha,\beta}$ berechnet werden. Im vollständig nicht entarteten Grenzfall $d > \Delta \gg \delta$ (siehe Abb.3.3 b)) entspricht einer Mittelung von $f(\xi)$ eine Ähnlichkeitstransformation von $g(\varphi)$. Wir erhalten

$$g(\varphi) \longrightarrow \bar{g}_{\alpha}(\varphi) = F_{\alpha} * g(\varphi) = \frac{1}{\alpha} \int \hat{\delta}(\varphi' - \varphi/\alpha) g(\varphi') d\varphi' = \frac{1}{\alpha} g(\varphi/\alpha), \quad (3.45)$$

mit $\alpha = \Delta/\delta$ und $\hat{\delta}$ als Dirac'sche δ -Distribution. Der Mittelung einer vollständig entarteten Verteilungsfunktion (Fall b) aus Abbildung 3.3) entspricht eine auf $g(\varphi)$ wirkende Integralfaltung der Form

$$g(\varphi) \longrightarrow \bar{g}_{\beta}(\varphi) = \tilde{F}_{\beta} * g(\varphi) = \frac{1}{2\beta\hat{\varphi}} \int_{\varphi-\beta\hat{\varphi}}^{\varphi+\beta\hat{\varphi}} g(|\varphi'|) d\varphi', \quad (3.46)$$

mit $2\beta\hat{\varphi} = \Delta$ und $\hat{\varphi}$ als maximal belegtem Phasenvolumen von $f(\xi)$. Hierbei kann Fall a) sicherlich als der für stoßfreie Relaxation typischere Fall angesehen werden (siehe auch Argumentation bei Lynden-Bell 1967), da dieser eher mit der Vorstellung einer starken Phasenraumfilamentierung in Einklang zu bringen ist. Allerdings sind sowohl F_{α} als auch $\tilde{F}_{\beta}$ erlaubte Operatorklassen im Sinne von Kapitel 3.1.

In Abbildung 3.4 erkennt man, daß für eine gegebene Mittelungsskala im μ -Raum und gegebene Verteilungsfunktionen $f_{a,b}$ die entsprechenden reduzierten Gedächtnisfunktionen $\bar{g}_{\alpha,\beta}$ extrem unterschiedlich sein können. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Mittelungsskalen α, β selbst in unserer Modellrelaxation nicht vorgegeben, sondern über die dissipativ umzusetzende Energie ΔE selbstkonsistent bestimmt werden. Dabei werden verschiedene Klassen von Mittelungsoperatoren auf $g(\varphi)$ unterschiedlich effektiv bezüglich der Umsetzung von Nichtgleichgewichtsenergie in Gleichgewichtsenergie sein. Außerdem sind wir nicht so sehr an

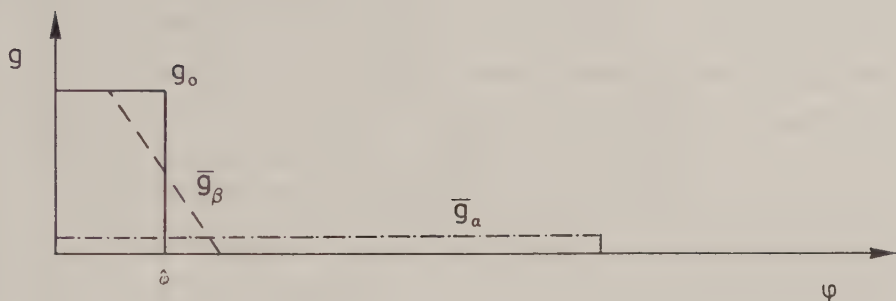


Abb. 3.4 g_0 ist die Gedächtnisfunktion der Verteilungsfunktionen $f_{a,b}$ aus Abbildung 3.3. $\hat{\varphi}$ bezeichnet das maximal belegte Phasenvolumen. g_α, g_β sind die Gedächtnisfunktionen der gemittelten Verteilungsfunktionen.

den reduzierten Gedächtnisfunktionen eines Endgleichgewichts interessiert. Vielmehr wollen wir realistische Resultate etwa für die Dichteverteilung im Ortsraum eines relaxierten Zustandes erhalten. Hierbei ist es wichtig, wie sensitiv die Lösungen von Gleichung (3.43) auf Änderungen von $g(\varphi)$ reagieren. Da $g(\varphi)$ nur sehr indirekt in Gleichung (3.43) eingeht und es sich außerdem um eine nichtlineare Integro-Differentialgleichung handelt, kann diese Abhängigkeit nicht sofort abgeschätzt werden.

Aus diesen Gründen wollen wir mit Hilfe von $F_\alpha, \tilde{F}_\beta$ berechnete Endzustände vergleichen. Dies soll für einen Anfangszustand f_0 geschehen, für den wir deutliche Unterschiede in den Resultaten der Modellrelaxationen erwarten. Deshalb soll auch hier der Fall, daß die Anfangsverteilung nur die Werte η oder 0 annehmen kann, behandelt werden. Dabei werden Anfangsverteilungen, die hinreichend nahe an ihrem assoziierten Gleichgewicht liegen ($E_0 \approx W_{\psi^*}(g_0)$) unter Verwendung der beiden Operatorklassen nicht zu deutlich unterschiedlichen Endverteilungen führen.

Da in diesem Falle die dissipativ umzusetzende Energie ΔE klein ist, werden die auf $g_0(\varphi)$ wirkenden Mittelungsoperatoren in beiden Fällen nur kleine Abweichungen von der Identität aufweisen, so daß der Endzustand in beiden Fällen nicht stark vom assoziierten Gleichgewicht der exakten Verteilungsfunktion abweicht. Auf der anderen Seite können wir auch keine deutlichen Unterschiede erwarten, falls ein Anfangszustand sehr weit weg von seinem assoziierten Gleichgewicht ist. In diesem Falle würde praktisch das gesamte, in $g(\varphi)$ enthaltene Gedächtnis an die Anfangsverteilung verloren gehen. Die Informationen aus der Erhaltung von Gesamtmasse und Gesamtenergie würden für das Endgleichgewicht dominierend. Für beide Mittelungsoperatorklassen würde $\bar{g}(\varphi)$ über einen weiten Bereich des Phasenraumvolumens φ konstant sein. Qualitative Unterschiede zeigten sich nur in einem relativ kleinen Bereich der Ordnung $2\hat{\varphi}$ (in der Notation von Abbildung 3.4). Wir wählen deshalb einen Anfangszustand, der nicht einer der beiden extremen Situationen entspricht. Ob dies der Fall ist, kann man dabei natürlich erst nach der Berechnung von $\bar{g}_\alpha$ bzw. $\bar{g}_\beta$ beurteilen. Wir wählen folgende Normierung:

(i) $r = |\vec{r}|$ wird auf einen typischen Radius r_{typ} der Anfangsverteilung normiert.

In unseren Beispielen wählen wir als r_{typ} denjenigen Radius, bei dem die Masendichte ϱ_0 der Anfangsverteilung verschwindet, also $\varrho_0(r) = 0$ für $r \geq r_{typ}$.

(ii) Die Geschwindigkeiten $v = |\vec{v}|$ werden auf $\sqrt{GM/r_{typ}}$ (Jeansgeschwindigkeit) normiert, so daß das Gravitationspotential ψ auf GM/r_{typ} und die Energien auf GM^2/r_{typ} normiert werden.

(iii) Die Anfangsverteilung f_0 sei so normiert, daß $\int f_0 d\xi = 1$ gilt.

Mit dieser Normierung habe f_0 die Gestalt

$$f_0(r, v) = \frac{1}{C} \begin{cases} 1 & \text{für } r \leq 1 \text{ und } v \leq v_{max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.47)$$

mit C als Normierungsfaktor

$$C = 16\pi^2 \int_0^1 \int_0^{v_{max}} r^2 v^2 dr dv = 16\pi^2 v_{max}^3 / 9.$$

Bei der angegebenen Wahl von f_0 wird die Stufenstruktur von $g(\varphi)$ bei der Anwendung der Operatoren F_α erhalten bleiben, während diese bei der Anwendung von $\tilde{F}_\beta$ deutlich geändert werden wird. Das zur exakten Verteilungsfunktion $f(\xi, t)$ assoziierte Gleichgewicht kann nun mit Hilfe eine Picard-Iteration zur Lösung von Gleichung (2.12) berechnet werden, wobei es ausreicht, sich auf kugelsymmetrische Lösungen zu beschränken (siehe Kapitel 2 und Aly 1989). Für den hier betrachteten, sehr speziellen Fall konstanter Phasenraumdichte kann (3.43) auch durch Transformation auf eine Emden-Gleichung mit Polytropenindex $3/2$ gebracht werden und damit die Lösung mit Hilfe der Lane-Emden-Funktion dargestellt werden (Bouvier & Janin 1970). Mit der Wahl $v_{max} = 1.0$ erhält man:

$$\begin{aligned} E_0 &= -0.30 \\ W_{\psi^*} &= -0.35 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta E}{|E_0|} \approx 0.17$$

Die Gedächtnisfunktion $g_0(\varphi)$ der exakten Verteilungsfunktion ist in Abbildung 3.5 dargestellt. In Abbildung 3.6 ist die Ortsraum-Massendichte der Anfangsverteilung, sowie die Ortsraum-Massendichte des zu f_0 assoziierten Gleichgewichtes dargestellt. Dabei können die numerischen Fehler bei der Lösung von Gleichung (2.12) als kleiner als 10^{-3} der typischen Werte angenommen werden.

Die Endzustände können nun unter Verwendung der Mittelungsoperatorklassen F_α (3.45) bzw. $\tilde{F}_\beta$ (3.46) berechnet werden. Die Mittelungsskalen α_f, β_f , die der Bedingung $W_{\psi^*}^{\alpha_f, \beta_f} = E_0$ (Gleichung (3.42)) genügen, erhält man z.B. durch eine zweite Iteration auf diese Parameter. Da $F_\alpha, \tilde{F}_\beta$ monoton bezüglich der Mischungsbedingung (3.39) und damit auch monoton bezüglich der Energie des zugehörigen

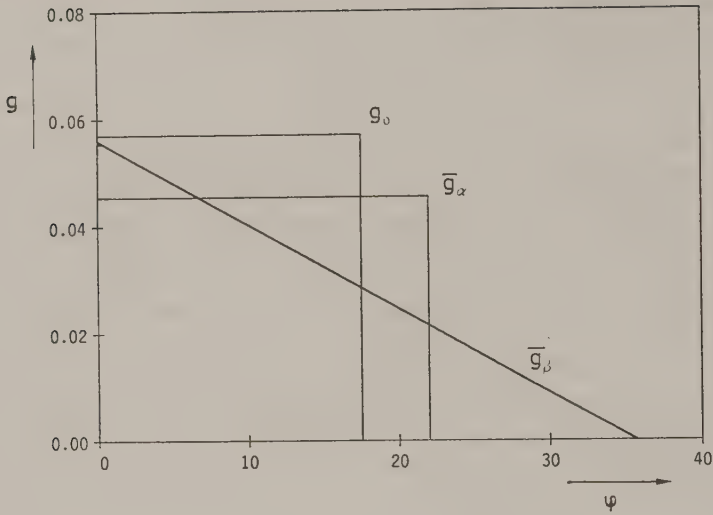


Abb. 3.5 g_0 ist die Gedächtnisfunktion der exakten Verteilungsfunktionen (Gleichung (3.47)) mit $v_{max} = 1.0$. $\bar{g}_\alpha, \bar{g}_\beta$ sind die reduzierten Gedächtnisfunktionen der Endzustände auf großen Skalen unter Verwendung der Mittelungsoperatoren vom Typ (3.45) bzw. (3.46).

assoziierten Gleichgewichtes sind (3.40), ist die Bestimmung von α_f, β_f z.B. durch die Iterationsvorschrift

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + W_{\psi^*}^{\alpha^n} - E_0 \quad (3.48)$$

immer möglich (in geeigneter Normierung). Eine solche Iteration wurde für den Fall der Operatorklasse $\tilde{F}_\beta$ auch durchgeführt. Im Falle der Operatorklasse F_α ist die Berechnung der Mittelungsskala α_f , sowie die Berechnung der typischen Größen des Endgleichgewichtes auf großen Skalen analytisch möglich, sofern das zu f_0 assoziierte Gleichgewicht bekannt ist (siehe Anhang A). Es gilt hierbei

$$\alpha_f = (W_{\psi^*}/E_0)^{3/2}, \quad (3.49)$$

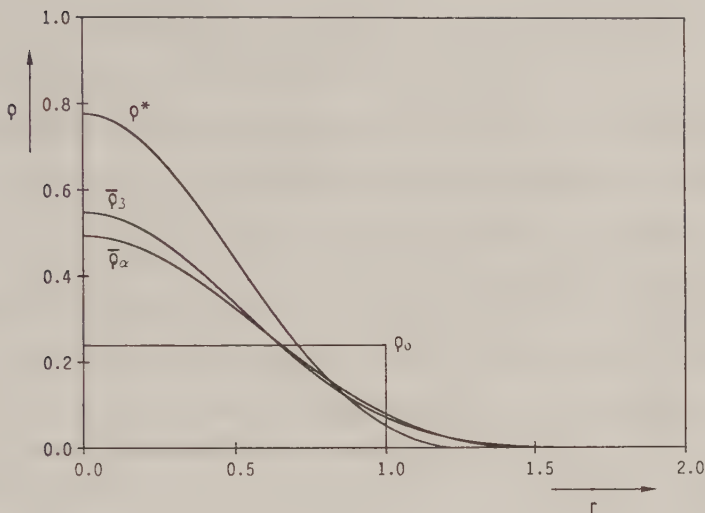


Abb. 3.6 ϱ_0 ist die Ortsraum-Massendichte der Anfangsverteilung (3.47). ϱ^* ist die Massendichte des zu f_0 assoziierten Gleichgewichtes. ϱ_α und $\bar{\varrho}_\beta$ sind die Massendichten der Endzustände der Modellrelaxation unter Verwendung der Mittelungsoperatoren vom Typ (3.45) bzw. (3.46).

sowie

$$\varrho_\alpha \rightarrow \alpha^{-2} \varrho^*(\alpha^{-2/3} \vec{r}) \quad (3.50)$$

$$\psi_\alpha \rightarrow \alpha^{-2/3} \psi^*(\alpha^{-2/3} \vec{r}) \quad (3.51)$$

$$W_\alpha \rightarrow \alpha^{-2/3} W_{\psi^*}^* . \quad (3.52)$$

Die mit * bezeichneten Größen sind dabei diejenigen des zu f_0 assoziierten Gleichgewichtes. Für unser Beispiel erhalten wir

$$\alpha_f = 1.260 \quad \beta_f = 1.036 .$$

In Abbildung 3.5 erkennt man, daß die Anfangsverteilung f_0 gerade so gewählt war, daß die Operatoren F_{α_f} , $\tilde{F}_{\beta_f}$ zu qualitativ deutlich unterschiedlichen reduzierten Gedächtnisfunktionen des Endgleichgewichts führen. Im Falle der Ähnlichkeitstransformation F_{α_f} erhalten wir wieder eine Stufenfunktion für $\bar{g}(\varphi)$, wobei das Maximum von $\bar{g}$ (und damit das Maximum von $\bar{f}_E$) deutlich abgesenkt wurde. Im Falle des Mittelungsoperators $\tilde{F}_{\beta_f}$ geht die Stufenform der Gedächtnisfunktion völlig verloren. Das Maximum von g bleibt praktisch ungeändert und die maximale Ausdehnung von $\bar{g}_{\beta_f}$ ist deutlich größer als diejenige von $\bar{g}_{\alpha_f}$. Betrachtet man jedoch die Massendichten der mit Hilfe von F_{α_f} bzw. $\tilde{F}_{\beta_f}$ berechneten Endgleichgewichte (Abbildung 3.6), so sind die Unterschiede deutlich kleiner (die Unterschiede in den Potentialen ψ sind natürlich noch geringer). Selbst bei diesem auf große Unterschiede hin angelegten Beispiel sind die Differenzen in den Massendichten der Endgleichgewichte maximal 10% der typischen Werte. Das Beispiel legt deshalb den Schluß nahe, daß die Lösungen von Gleichung (3.43) nur sehr schwach von den kleinskaligen Strukturen der Gedächtnisfunktionen $g(\varphi)$ abhängen. Da zudem die korrekte Mittelungsskala durch die Modellrelaxation selbst festgelegt wird und daher die Freiheit nur in der Wahl der speziellen Form (nicht der Stärke) des Mittelungsprozesses liegt, ist anzunehmen, daß wir in der Wahl der Mittelungsoperatorklasse (aus den nach (3.38) und (3.39) erlaubten Klassen) relativ frei sind.

Trotz dieser für unser Modell erfreulichen Tatsache, ist es nützlich, noch einmal die Frage nach der besten Wahl für die Mittelungsoperatorklasse für $g(\varphi)$ unter grundsätzlichen Gesichtspunkten zu diskutieren. Wie schon am Anfang dieses Kapitels erwähnt, hängt die korrekte Wahl der Mittelungsoperatorklasse von der kleinskaligen Struktur der exakten Verteilungsfunktion $f(\xi, t)$ ab, denn die Mittelung von $g(\varphi)$ muß einer Mittelung von $f(\xi, t)$ entsprechen. Deshalb kann diese Frage letztlich nur durch hochgenaue dynamische Rechnungen geklärt werden. Allerdings haben wir argumentiert, daß das Endgleichgewicht auf großen Skalen Strukturen aufweisen

sollte, die in der Nähe der mit Hilfe der "extremen" Operatoren (3.45),(3.46) berechneten Strukturen liegen sollten. Außerdem sollte die Wahl der Operatorklasse keinen nennenswerten Einfluß in Fällen haben, bei denen der Anfangszustand sehr nahe am oder sehr weit weg von seinem assoziierten Gleichgewicht liegt. Abgesehen von diesen Einschränkungen entspricht einer bestimmten Wahl der Operatorklasse $\{F_\alpha\}$ eine Annahme über die Dynamik der Systeme, wie dies auch in rein statistischen Modellen notwendig ist (z.B. Lynden-Bell 1967). Die Annahme einer hinreichend starken Filamentierung der Verteilungsfunktion zusammen mit der angegebenen einfachen Mittelung von $f(\xi, t)$ wie in unserem Beispiel aus Abbildung 3.3 a), führt dabei zur Ähnlichkeitstransformation von $g(\varphi)$. Einer Argumentation von Lynden-Bell folgend, halten wir diese Situation für typisch bei der dynamischen Relaxation stoßfreier selbstgravitierender Materie. Sie entspricht dem nicht-entarteten Grenzfall in der Terminologie von Lynden-Bell. Diese Entsprechung bleibt bestehen, falls die Anfangsverteilung aus Elementen verschiedener Phasenraumdichten g_i (oder aus einem Kontinuum solcher Dichten) besteht. Der Ähnlichkeitstransformation entspricht dann die Bedingung, daß nicht nur die Gesamtmasse, sondern auch die Masse jeder "Sorte" g_i für sich erhalten bleiben muß. Weitere dynamische Bedingungen können die Genauigkeit unserer Methode erhöhen. Da wir in erster Linie an einer prinzipiellen Entwicklung unseres Modells interessiert sind, wollen wir dies jedoch an dieser Stelle nicht weiter verfolgen. Da die Unterschiede in den Endzuständen unter Verwendung verschiedener Mittelungsoperatorklassen i.a. noch kleiner als diejenigen aus dem angeführten Beispiel sind, wird sich zudem in Kapitel 4 zeigen, daß unsere dynamischen Rechnungen zu ungenau sind um zwischen speziellen Mittelungsoperatorklassen zu diskriminieren.

Nachdem wir nun einige Gemeinsamkeiten mit statistischen Modellen aufgezeigt haben, sei noch einmal auf den entscheidenden Unterschied zu solchen Modellen hingewiesen. In den genannten statistischen Modellen (z.B. Lynden-Bell 1967, Shu

1978) versucht man Endgleichgewichte auf großen Skalen zu berechnen, indem man nach stationären Punkten geeigneter Funktionale der Form (3.7) unter den Nebenbedingungen der Massen- und Energieerhaltung sucht. Anschaulich gesprochen sucht man dabei also (unter den Nebenbedingungen) Zustände größter Unkenntnis. Wie Wiechen (1989) gezeigt hat, muß dies i.a. scheitern. In unserm Modell versuchen wir Endzustände dadurch zu berechnen, indem wir nach Gleichgewichtszuständen größter Stabilität suchen und das Maß an Unkenntnis (die Mittelungsparameter) gerade so einstellen, daß diese Zustände mit den Nebenbedingungen vereinbar werden.

4. Dynamische Behandlung

4.1 Problemstellung

Neben der Freiheit in der Wahl der Mittelungsoperatorklasse $\{F_\alpha\}$ enthalten die in Kapitel 3 vorgestellten Modellrelaxationen die grundsätzliche Annahme, daß die Systeme auf großen Skalen einem stoßfrei global stabilen Gleichgewicht zustreben. Dies ist zwar der "stabilste" aller Gleichgewichtszustände, aber es ist nicht von vorneherein klar, ob dieser für typische Anfangsverteilungen auch dynamisch (gemeint ist hier die Dynamik auf großen Skalen) zugänglich ist, da in die Modellrelaxationen nur sehr rudimentäre dynamische Informationen eingegangen sind (Phasenvolumenerhaltung der exakten Dynamik, Mischung für die Dynamik auf großen Skalen, sowie Massen- und Energieerhaltung). Aus diesen Gründen ist ein Vergleich mit der Dynamik der betrachteten Systeme, zumindest für einige typische Fälle nötig, um die Realitätsnähe unserer Relaxationsmodelle einschätzen zu können.

Das ideale Vergleichsverfahren bestünde dabei aus drei Schritten:

- Zuerst wird die exakte Dynamik des betrachteten Systems bestimmt, d.h. $f(\xi, t)$ wird gemäß dem (BPS) für alle $t > t_0$ berechnet.
- Dann wird die exakte Verteilungsfunktion $f(\xi, t)$ gemittelt, um eine Verteilungsfunktion $\langle f \rangle(\xi, t)$ auf großen Skalen zu erhalten.
- Wird die gemittelte Verteilungsfunktion $\langle f \rangle(\xi, t)$ stationär, ist der Vergleich mit dem Ergebnis der Modellrelaxation möglich.

Da die Lösungen des (BPS) im allgemeinen aber nur auf numerischem Wege zu erhalten sind stößt man sofort auf folgendes Problem:

Die stoßfreie Entwicklung eines Systems, hin zu einem Gleichgewicht auf großen Skalen, ist nur möglich, falls es zu einer in der Regel voranschreitenden Filamentierung der exakten Verteilungsfunktion im Phasenraum kommt (Phasenmischung). Da aber

die Auflösung numerischer Verfahren notwendig endlich ist, führt dies zumindest zu Informationsverlusten durch das numerische Verfahren, so daß die Berechnung der exakten Dynamik unmöglich wird. Z.B. kommt es bei Differenzenverfahren zur Lösung des (BPS) unter anderem zu einer erheblichen numerischen Diffusion, falls sich die Schwankungen der Verteilungsfunktion auf der Skala der Gitterabstände abspielen (siehe Kapitel 4.2). Man ist also praktisch immer auf Glättungsverfahren, ob explizit oder implizit durch das Diskretisierungsschema, angewiesen. Hierbei ist natürlich eine besonders kritische Frage, wie physikalisch solche Glättungsverfahren sind und ob man die daraus resultierenden Fehler abschätzen oder interpretieren kann. Da wir ohnehin nur an einer gemittelten Verteilungsfunktion $\langle f \rangle (\xi, t)$ interessiert sind, ist es deshalb günstig, von vorneherein zu einer wohldefinierten Dynamik auf großen Skalen überzugehen, um die beschriebenen Probleme zu vermeiden. Wir werden deshalb ein von Klimas (1987) vorgestelltes Verfahren anwenden, das auf einfachem Wege zu einer wohldefinierten Dynamik auf großen Skalen im Geschwindigkeitsraum führt (siehe Kapitel 4.3).

In Kapitel 4.4 wird die Realisierung dieses Verfahrens mit Hilfe einer Differenzenmethode zur Lösung des gemittelten (BPS) vorgestellt. Dabei beschränken wir uns auf den Fall von Kugelsymmetrie im Ort.

In Kapitel 4.5 werden die Ergebnisse einiger dynamischer Rechnungen vorgestellt und mit den Ergebnissen der Modellrelaxation verglichen.

4.2 Numerisches Verfahren

Zur Lösung des (BPS) oder eines geeignet gemittelten Systems auf numerischem Wege stehen im wesentlichen zwei grundsätzlich verschiedene Methoden zur Verfügung. Dies sind zum einen die Teilchensimulation und zum anderen die direkt auf das (BPS) angewandten Differenzenverfahren. Daneben sind noch, oft in Verbindung mit Differenzenverfahren, Entwicklungsverfahren gebräuchlich, bei denen das (BPS) zunächst nach einem geeigneten Funktionensystem entwickelt wird, um dann das entstandene Gleichungssystem unter Berücksichtigung endlich vieler Ordnungen zu lösen. Die Entwicklungsverfahren bieten für unsere Anwendungen jedoch keinen entscheidenden Vorteil gegenüber Differenzenverfahren und sind zudem programmtechnisch aufwendiger, so daß sie hier nicht weiter diskutiert werden. Bei den Teilchensimulationen wird das (BPS) gelöst, indem die Bewegung einer sehr großen Zahl N von Teilchen in ihren selbstkonsistenten Feldern berechnet wird. Für $N \rightarrow \infty$ wird das (BPS) also durch Berechnung aller Charakteristiken gelöst. Dieses Verfahren ist besonders interessant, wenn es lediglich auf die Berechnung etwa von Dichteverteilungen im Ortsraum ankommt, da sich die Bedingung der Stoßfreiheit schon mit relativ wenigen Teilchen gut erfüllen läßt. Bei einer Simulation mit 10^4 Teilchen liegt bereits ein Faktor 1000 zwischen der effektiven Stoßzeit (unter Berücksichtigung von Kleinwinkelstößen) und der typischen dynamischen Zeit (mittlere Zeit zur Durchquerung des betrachteten Gebietes). Die unerwünschten Stößeffekte können zudem, bei der Verwendung von räumlich ausgedehnten "Teilchenwolken", weiter vermindert werden. Bei einer im Ortsraum eindimensionalen Simulation mit einer Auflösung des Ortsraumes durch 50 Stützstellen befinden sich im Mittel 200 Teilchen in einer Ortsraumzelle, so daß die statistischen Fehler bei der Berechnung der Ortsraumdichte nur etwa 7% betragen. Will man jedoch wie in unserem Falle auch Informationen über

das zeitliche Verhalten des Systems im Phasenraum erhalten, so ist die Teilchensimulation weniger gut geeignet. In unserem Falle (Kugelsymmetrie im Ortsraum, zwei Geschwindigkeitskoordinaten, siehe Kapitel 4.4) wären, bei einer Auflösung von 50 Punkten pro Phasenraumrichtung, bereits mehr als 10^7 Teilchen nötig, um die statistischen Fehler bei der Berechnung von $f(\xi, t)$ kleiner als 10% zu halten. Diese Methode wird damit sehr unökonomisch und wäre, auf den uns zur Verfügung stehenden Rechnern, aus Gründen der beschränkten Speicherplatzkapazität auch nicht durchführbar. Aus diesen Gründen haben wir ein einfaches Differenzenverfahren zur Lösung des (BPS) bzw. eines gemittelten (BPS) gewählt.

Im folgenden sollen die Kriterien für die Auswahl eines solchen Verfahrens sowie seine Eigenschaften diskutiert werden (siehe z.B. Richtmyer & Morton 1967, Potter 1973). Der Einfachheit halber betrachten wir dazu das Beispiel einer eindimensionalen Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

mit $y = y(x, t)$ und $v = \text{const.}$. Die Erweiterung auf mehrdimensionale Systeme birgt keine grundsätzlich neuen Schwierigkeiten. Wir diskretisieren x und t in äquidistante Intervalle

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j \quad (4.2)$$

$$\Delta t = t^{n+1} - t^n \quad (4.3)$$

und bezeichnen $y(x_i, t^n)$ mit y_i^n . Eine wichtige Eigenschaft von (4.1) ist die Massenerhaltung, d.h. die Masse in einem Volumen V kann sich nur durch Ein- oder Ausströmung durch den Rand von V ändern. Diese Eigenschaft sollte möglichst auch für unser numerisches Verfahren erfüllt sein. Bezeichnet man mit $F_{j+1/2}$ diejenige Masse,

die in einem Zeitschritt von der Zelle j , d.h. aus dem Bereich $[x_j - \Delta x/2, x_j + \Delta x/2]$, in die Zelle $j + 1$ fließt, so muß gelten:

$$y_j^{n+1} = y_j^n - F_{j+1/2} + F_{j-1/2} \quad (4.4)$$

Die Flüsse F müssen nun in einem expliziten Schema aus den y_j^n berechnet werden. Da wir ein einfaches Verfahren wählen wollen, machen wir den lokalen Ansatz

$$F_{j+1/2} = a_{j+1} y_{j+1}^n + b_j y_j^n, \quad (4.5)$$

wobei für unser Modellproblem ($v = \text{const.}$, äquidistante Zerlegung) a und b nicht mehr von j abhängen. Es gilt also

$$y_j^{n+1} = y_j^n - a y_{j+1}^n + (a - b) y_j^n + b y_{j-1}^n. \quad (4.6)$$

a und b sind nun so zu wählen, daß der Diskretisierungsfehler möglichst klein wird. Daneben ist aber noch zu berücksichtigen, daß das gewählte Verfahren numerisch stabil sein muß, d.h., daß kleine oszillatorische Fehler, wie sie in einer numerischen Behandlung immer auftreten, mit der Zeit nicht anwachsen. Ein einfaches Stabilitätskriterium (Courant et al. 1928) erhält man durch eine Fourieranalyse von Gleichung (4.6) gemäß

$$y_j^n = \sum_k \hat{y}_k^n e^{ikx_j}. \quad (4.7)$$

Stellt sich dabei heraus, daß der Verstärkungsfaktor $g = \hat{y}_k^{n+1}/\hat{y}_k^n$ für eine Mode k größer als 1 ist, so ist das Verfahren numerisch instabil, denn eine solche Störung, die etwa durch Rundungsfehler immer auftritt, würde in der Zeit anwachsen. Damit das Diskretisierungsverfahren numerisch stabil ist muß also $|g| \leq 1 \forall k$ gelten. Mit (4.6) und (4.7) ergibt sich der Verstärkungsfaktor zu

$$g = 1 + (a - b)(1 - \cos(k\Delta x)) - i(a + b) \sin(k\Delta x). \quad (4.8)$$

Um die Koeffizienten a und b in Gleichung (4.6) festlegen zu können, entwickelt man beide Seiten von (4.6) in eine Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung. Daraus erhält man

$$\begin{aligned}
 y_j^n + \Delta t \frac{\partial y_j^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 y_j^n}{\partial t^2} = & (a - b + 1) y_j^n \\
 & - a(y_j^n + \Delta x \frac{\partial y_j^n}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 y_j^n}{\partial x^2}) \\
 & + b(y_j^n - \Delta x \frac{\partial y_j^n}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 y_j^n}{\partial x^2}), \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

wobei $\partial y_j^n / \partial t$ bzw. $\partial y_j^n / \partial x$ die Ableitungen von y an der Stelle (j, n) bezeichnen soll. Benutzt man nun Gleichung (4.1) sowie $\partial^2 y / \partial t^2 = v^2 \partial^2 y / \partial x^2$ so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$a + b = \epsilon \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{v \Delta t}{\Delta x} \quad (4.10)$$

als Konsistenzbedingung für ein Verfahren erster Ordnung. Damit erhält man aus (4.8) gg^* zu

$$gg^* = (1 + (a - b)(1 - \cos(k\Delta x)))^2 + \epsilon^2 \sin^2(k\Delta x), \quad (4.11)$$

so daß $gg^* \leq 1$ erfüllt ist, falls

$$\epsilon^2 \leq b - a \leq 1 \quad (4.12)$$

gilt. $b - a$ ist dabei ein Maß für die numerische Diffusion des betrachteten Schemas. Wählt man etwa $a = (\epsilon - 1)/2$, $b = (\epsilon + 1)/2$ also $b - a = 1$ (Lax-Schema), so ergibt sich für gg^*

$$gg^* = 1 - \sin^2(k\Delta x)(1 - \epsilon^2). \quad (4.13)$$

Dies führt aber zu einer erheblichen Dämpfung von Strukturen mittlerer und hoher Wellenzahlen. Für kleine Wellenzahlen ($k\Delta x$ klein) ergibt sich immer noch

$$gg^* \approx 1 - k^2 \Delta x^2 (1 - \epsilon^2), \quad (4.14)$$

so daß dieses Schema für unsere Zwecke ungeeignet ist. Wir wollen deshalb den anderen Grenzfall $b-a = \epsilon^2$ wählen, der mit der Stabilitätsbedingung noch verträglich ist. Dieser Fall ist, mit dem Ansatz (4.5) gemäß (4.9), auch das einzige Verfahren zweiter Ordnung in Δt (Lax-Wendroff-Verfahren). Mit $a = \epsilon(1 - \epsilon)/2$ und $b = \epsilon(1 + \epsilon)/2$ erhält man

$$g = 1 - \epsilon^2(1 - \cos(k\Delta x)) - i\epsilon \sin(k\Delta x) \quad (4.15)$$

und

$$gg^* = 1 - \epsilon^2(1 - \epsilon^2)(1 - \cos(k\Delta x))^2 \quad (4.15)$$

$$\stackrel{k\Delta x \rightarrow 0}{\approx} 1 - \epsilon^2(1 - \epsilon^2) \frac{k^4 \Delta x^4}{4}, \quad (4.16)$$

so daß eine nennenswerte Dämpfung hier nur für Strukturen sehr kleiner Skala auftritt.

Die Eigenschaften des Lax-Wendroff Verfahrens sollen nun noch etwas genauer diskutiert werden. Dazu betrachten wir eine Fourier-Mode in Ort und Zeit

$$y(x, t) = \hat{y} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (4.17)$$

Gleichung (4.1) liefert sofort die Dispersionsrelation

$$\omega = vk. \quad (4.18)$$

Betrachtet man jedoch das Lax-Wendroff Schema, so erhält man für den Real- und Imaginärteil der Dispersionsrelation mit $\omega = \Omega + i\gamma$

$$\tan(\Omega\Delta t) = \frac{\epsilon \sin(k\Delta x)}{1 - \epsilon^2 + \epsilon^2 \cos(k\Delta x)} \quad (4.19)$$

$$e^{-2\gamma\Delta t} = 1 - \epsilon^2(1 - \epsilon^2)(1 - \cos(k\Delta x))^2. \quad (4.20)$$

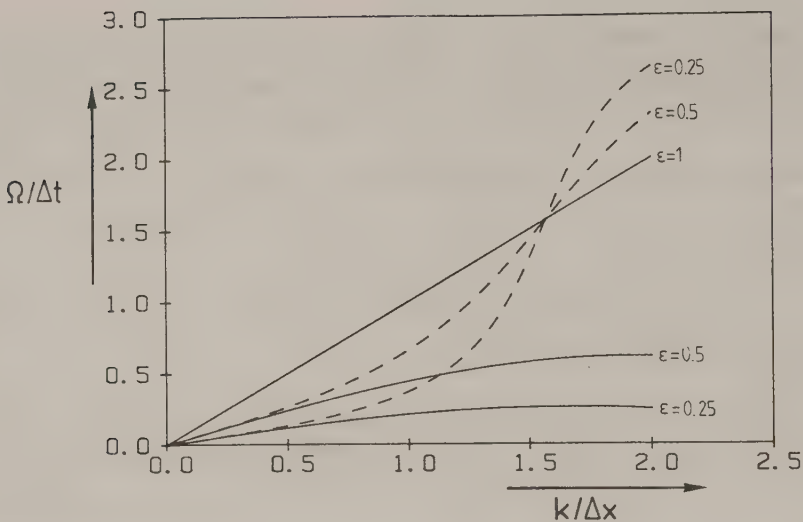


Abb. 4.1 Realteil der Dispersionsrelation des Lax-Wendroff Schemas für verschiedene Werte von ϵ . Zum Vergleich ist auch die Dispersionsrelation eines Lax Schemas eingetragen (gestrichelte Linien).

In Abbildung 4.1 und 4.2 erkennt man, daß sich starke Abweichungen von der Dispersionsrelation (4.18) nur für große Wellenzahlen ergeben. Deshalb erwarten wir erhebliche Abweichungen der Lösungen des Lax-Wendroff Schemas von den exakten Lösungen von (4.1) (durch dispersive und diffusive Effekte der Diskretisierung) nur für den Fall, daß sich die Strukturen der Lösung auf der Skala der Gitterabstände abspielen.

Zur Lösung des (BPS) bzw. eines geeignet gemittelten Systems wollen wir das Lax-Wendroff Schema in einer leicht modifizierten Form, nämlich als Zwei-Schritt Verfahren benutzen.

$$y_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(y_{j+1}^n + y_j^n) - \frac{\epsilon}{2}(y_{j+1}^n - y_j^n) \quad (4.21)$$

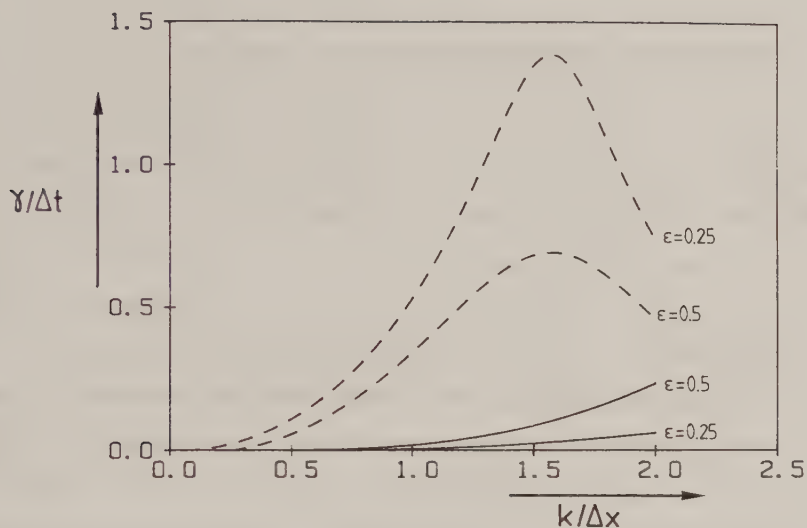


Abb. 4.2 Imaginärteil der Dispersionsrelation des Lax-Wendroff Schemas für verschiedene Werte von ϵ . Zum Vergleich ist auch die Dispersionsrelation eines Lax Schemas eingetragen (gestrichelte Linien).

$$y_j^{n+1} = y_j^n - \epsilon(y_{j+1/2}^{n+1/2} - y_{j-1/2}^{n+1/2}) \quad (4.22)$$

Diese Vorgehensweise ist für den Fall konstanter Koeffizienten (in unserem Beispiel v) äquivalent zum Lax-Wendroff-Schema in der vorher vorgestellten Form. Im Falle nicht konstanter Koeffizienten, wie bei der Diskretisierung der (BPS), ist das Zweischritt Verfahren jedoch deutlich einfacher als die entsprechende Verallgemeinerung des Ein-Schritt Verfahrens zu realisieren.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß ein auf mehrere Dimensionen erweitertes Stabilitätskriterium analog zu (4.12) für das (BPS) nicht streng gilt, da der Term $\nabla\psi$ über (2.2) noch eine Zeitabhängigkeit enthält. Im allgemeinen ist $\nabla\psi$ aber nur schwach zeitabhängig, so daß die Verallgemeinerung von (4.12) weiterhin gute Hinweise auf das Stabilitätsverhalten liefert.

4.3 Dynamik auf großen Skalen

Wie im vorigen Kapitel genauer erläutert erhält man bei der Lösung des (BPS) mit Hilfe des Lax-Wendroff Schemas unkontrollierbare numerische Fehler, sofern die Strukturen der Lösung von der Skala der Gitterabstände sind. Wie in Kapitel 4.1 erwähnt, erwarten wir aber genau dieses Verhalten von der exakten Lösung des (BPS). Wir wollen deshalb ein Glättungsverfahren für den Geschwindigkeitsraum (erfahrungsgemäß ist dort die Filamentierung am stärksten) benutzen, das zuerst von Klimas (1987) als streng gültige, wohldefinierte Dynamik auf großen Skalen interpretiert wurde. Die resultierenden gemittelten Gleichungssysteme wurden in ähnlicher Form schon sehr viel früher benutzt (siehe z.B. Kellog 1965; Cheng & Knorr 1976), jedoch wurden diese Verfahren nur als eine effektive künstliche Glättungsmethode verstanden. Dieses Verfahren soll nun vorgestellt und an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

Die Idee des Verfahrens besteht darin, das System aus stoßfreier Boltzmann-Gleichung und Poisson-Gleichung sowie die Anfangsverteilung f_0 mit dem gleichen Mittelungsoperator L zu mitteln. Dabei ist L so zu wählen, daß das gemittelte (BPS) nur noch eine Gleichung für die gemittelte Verteilungsfunktion $\bar{f}$ ist.

$$\bar{f}_0(\xi) = L * f_0(\xi) \quad (4.23)$$

$$\overline{(BPS)} = L * (BPS) \quad (4.24)$$

Daraus erhält man eine streng gültige Dynamik auf großen Skalen und

$$\bar{f}(\xi, t) = L * f(\xi, t) \quad (4.25)$$

gilt für alle Zeiten t , so daß die Abweichungen von der exakten Dynamik spezifizierbar und interpretierbar sind. Der einfachste von Klimas vorgeschlagene Operator, der dieser Bedingung genügt, ist

$$L * (.) = \int \tilde{L}(\vec{v} - \vec{v}') (.) d^3 v', \quad (4.26)$$

mit

$$\tilde{L}(\vec{v}) = v_0^{-1} (2\pi)^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\vec{v}^2}{v_0^2}\right) \quad (4.27)$$

und v_0 als Parameter der Mittelungsbreite im Geschwindigkeitsraum. Masse und Impuls bleiben bei der Anwendung des Operators ungeändert, denn es gilt

$$\int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v = \int \bar{f}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v \quad (4.28)$$

$$\int \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v = \int \vec{v} \bar{f}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v. \quad (4.29)$$

Da nur (4.28) in die Poisson-Gleichung eingeht, bleibt der Ortsraum von dieser Mittelung vollständig unberührt. Die Gesamtenergie wird allerdings durch die Mittelung von f_0 geändert, sie ist im Laufe der gemittelten Dynamik aber wieder konstant. Da die Änderung der Gesamtenergie nur proportional zu v_0^2 und von f_0 unabhängig ist, stellt dies für unsere Zwecke kein Problem dar. Mittelungsoperatoren, die auch höhere Momente erhalten, sind ebenfalls leicht konstruierbar. Ihre Berücksichtigung in einem numerischen Schema erfordert aber einen erheblich höheren Aufwand.

Wählt man den Operator (4.26)(4.27), so ergibt sich die Abschätzung

$$\left| \vec{e} \cdot \frac{\partial \bar{f}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} \right| \leq \frac{2\hat{g}_0}{v_0 \sqrt{2\pi}}, \quad (4.30)$$

mit $\vec{e}$ als beliebiger Richtung im Geschwindigkeitsraum und $\hat{g}_0$ als Maximum von f_0 . Damit stellt die Filamentierung im Geschwindigkeitsraum numerisch kein Problem mehr dar, sofern die Skala v_0 durch einige Gitterpunkte aufgelöst wird.

Neben seiner Einfachheit und Strenge besitzt das vorgestellte Mittelungsverfahren den Vorzug, unserem Konzept der gewollten Unschärfe bei der Betrachtung von Endverteilungsfunktionen auf der dynamischen Seite zu entsprechen. Da (4.25) für alle t gilt, sind die Lösungen des $\overline{(BPS)}$ stets als unscharf betrachtete exakte Lösungen des (BPS) zu interpretieren. Dies wollen wir an einem einfachen Beispiel illustrieren.

Wir betrachten dazu den analytisch behandelbaren Fall einer eindimensionalen freien Strömung mit periodischen Randbedingungen im Ortsraum. Es gilt

$$\frac{\partial f(x, v, t)}{\partial t} + v \frac{\partial f(x, v, t)}{\partial x} = 0, \quad (4.31)$$

mit $x \in [0, 1]$. Die Anfangsverteilung f_0 laute

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 - \cos(2\pi x)) e^{-v^2}. \quad (4.32)$$

Damit ist die exakte Lösung von (4.31)

$$f(x, v, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [1 - \cos(2\pi(x - vt))] e^{-v^2}. \quad (4.33)$$

Die Strukturen im Geschwindigkeitsraum werden also linear mit t immer kleinskaliger und f bleibt für alle endlichen t stark zeitabhängig. Betrachtet man f jedoch mit endlicher Auflösung, so sind die zeitabhängigen Strukturen im Geschwindigkeitsraum für hinreichend große t nicht mehr zu erkennen. Die so gemittelte Verteilungsfunktion wird annähernd stationär. Genau dieses Verhalten zeigt auch die gemittelte Dynamik. Bei Anwendung von (4.26) und (4.27) auf (4.31) erhält man

$$\frac{\partial \bar{f}(x, v, t)}{\partial t} + v \frac{\partial \bar{f}(x, v, t)}{\partial x} = -v_0^2 \frac{\partial^2 \bar{f}(x, v, t)}{\partial x \partial v}. \quad (4.34)$$

Die gemittelte Anfangsverteilung lautet

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{a}} (1 - \cos(2\pi x)) e^{-v^2/a}, \quad (4.35)$$

mit $a = 1 + 2v_0^2$. Die Lösung von (4.34) ist damit

$$\bar{f}(x, v, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{a}} [1 - \cos(2\pi(x - vt)) \exp(\frac{-2\pi^2 v_0^2}{a} t^2)] \exp(-v^2/a). \quad (4.36)$$

Das Verhalten der gemittelten und der exakten Lösung ist in Abbildung 4.3 dargestellt

Die rechte Seite von (4.34) mag auf den ersten Blick den Eindruck erwecken, es sei mit dem Mittelungsverfahren ein Dissipationsterm ähnlich einem Stoßterm eingeführt worden, so daß für die Entropie der gemittelten Verteilungsfunktion auf jeden Fall

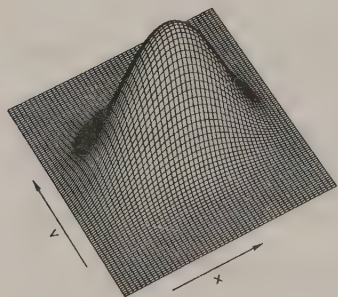
$$\frac{d\bar{S}}{dt} \geq 0 \quad (4.37)$$

sichergestellt wäre. Wie man aber schon dem Konstruktionsverfahren für die gemittelte Dynamik entnehmen kann, ist dies nicht der Fall, da es sich bei $\bar{f}$ stets nur um ein unscharfes Bild von f handelt. Es gilt deshalb zwar immer

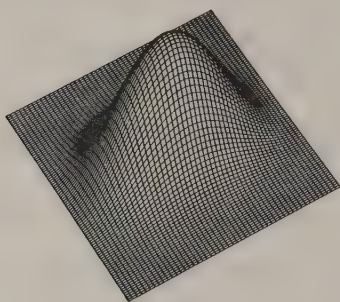
$$\bar{S} \geq S = \text{const.} \quad (4.38)$$

aber (4.37) ist nur dann erfüllt, falls die exakte Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum monoton mit der Zeit immer stärker filamentiert. Umgekehrt kann man schließen: Wächst $\bar{S}(t)$, so erleidet die exakte Verteilungsfunktion eine Filamentierung im Geschwindigkeitsraum. Fällt $\bar{S}(t)$ so antifilamentiert die exakte Verteilungsfunktion. Ersteres wird hierbei zumindest im zeitlichen Mittel der generische Fall sein. Ähnlich wie bei einer analogen Vorgehensweise für Verteilungsfunktionen im Γ -Raum ($6 - N$ dimensionaler Phasenraum mit N als Teilchenzahl) kann man auch hier erwarten, daß die Anfangsverteilungen f_0 , für die sich $dS/dt < 0 \forall t$ ergibt, vom Maße Null sind.

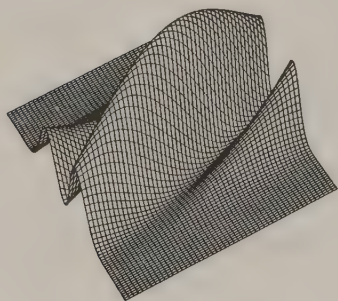
$t = 0 ; v_0 = 0$



$t = 0 ; v_0 = 0.25$



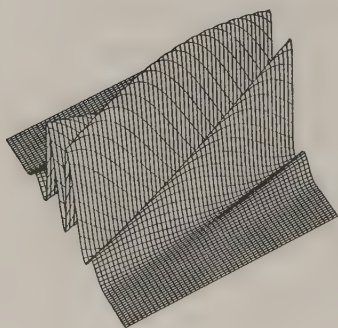
$t = 0.5 ; v_0 = 0$



$t = 0.5 ; v_0 = 0.25$



$t = 1 ; v_0 = 0$

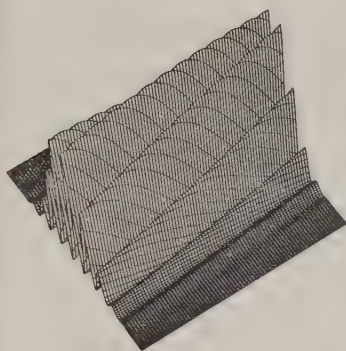


$t = 1 ; v_0 = 0.25$



Abb. 4.3

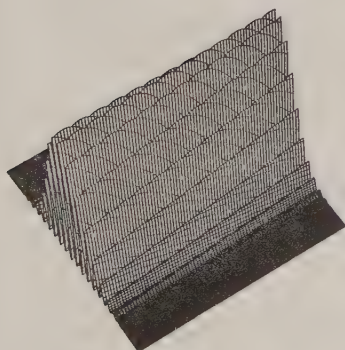
$$t = 2 ; v_0 = 0$$



$$t = 2 ; v_0 = 0.25$$



$$t = 4 ; v_0 = 0$$



$$t = 4 ; v_0 = 0.25$$

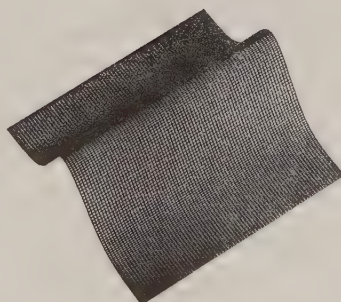


Abb. 4.3 Perspektivische Darstellung der Verteilungsfunktionen (4.33) bzw. (4.36) zu verschiedenen Zeiten ($r \in [0, 1]$, $v \in [-3, 3]$).

4.4 Realisierung

Da eine numerische Lösung des (BPS) im 6-dimensionalen Phasenraum mit hinreichender Auflösung auf heutigen Rechnern nicht möglich ist, beschränken wir uns bei unseren dynamischen Rechnungen auf den Fall von Kugelsymmetrie im Ortsraum. f sei also sphärisch symmetrisch in $\vec{r}$, wobei wir ein Koordinatensystem so wählen, daß f eine Funktion von $r = |\vec{r}|$, $v = |\vec{v}|$, $\mu = \cos(\angle \vec{r}, \vec{v})$ und t ist. In der Normierung von Kapitel 3.2 reduziert sich das (BPS) damit zu

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{M}{r^2} \mu \frac{\partial f}{\partial v} + \left(\frac{v}{r} - \frac{M}{r^2 v} \right) (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \quad (4.39)$$

mit

$$M(r, t) = 8\pi \int_0^r \int_0^\infty \int_{-1}^1 r'^2 v'^2 f(r', v, \mu, t) d\mu dv dr' . \quad (4.40)$$

Bei der Anwendung von L auf das (BPS) gemäß (4.26) und (4.27) ergibt sich für die Dynamik auf großen Skalen im Geschwindigkeitsraum

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + v\mu \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} - \frac{M}{r^2} \mu \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} + \left(\frac{v}{r} - \frac{M}{r^2 v} \right) (1 - \mu^2) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mu} \\ = -v_0^2 \left(\mu \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r \partial v} + \frac{(1 - \mu^2)}{v} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r \partial \mu} \right) . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Wegen (4.28) bleibt $M(r, t)$ ungeändert, so daß in (4.40) f lediglich durch $\bar{f}$ zu ersetzen ist. Durch die Mittelung $L * f_0 = \bar{f}_0$ wird die kinetische Energie lediglich um den Betrag $\frac{3}{2}v_0^2$ erhöht. v_0 wurde in den Beispielen aus Kapitel 4.5 zu 0.1 gewählt.

Zur Lösung von (4.41) benutzen wir das in Kapitel 4.2 beschriebene Lax-Wendroff-Zweischrittverfahren in einer direkt auf (4.41) angewandten Diskretisierung. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß das Verfahren in diesem Falle nicht mehr streng, sondern nur noch bis zur zweiten Ordnung in Δt konservativ ist. (4.41) läßt sich zwar auch leicht in streng konservativer Form diskretisieren (siehe etwa Shlosman et al. 1979), es zeigt sich aber, daß die Diskretisierungsfehler in diesem Falle

nahe ($r = 0$) und ($v = 0$) (aufgrund der Kugelsymmetrie) so erheblich sind, daß das Schema nur durch die Anwendung einer starken, expliziten Gradientenglättung stabil gehalten werden kann. Da dadurch aber wieder ein unkontrollierbarer Informationsverlust erzeugt wird, wollen wir solche Methoden nicht anwenden.

Anders als in unserem Beispiel in Kapitel 4.2 ist das Lax-Wendroff- Zweischrittverfahren für beliebige nicht äquidistante aber feste Gitter in r, v, μ formuliert, um die Gitterpunkte in den Teilen des Phasenraumes konzentrieren zu können, in denen sich die dynamische Entwicklung der Systeme im wesentlichen abspielt. Die Integrationen in (4.40) wurden mit Schemata höherer Ordnung (Simpson- bzw. 3/8-Schema in jedem Halbschritt) durchgeführt, da es sich herausstellte, daß Fehler in der Berechnung von $M(r, t)$ zur Akkumulation neigen. Weitere Einzelheiten des Diskretisierungsschemas sowie der programmtechnischen Realisierung finden sich in Anhang B.

Die Berechnungen wurden in einem hinreichend großen aber beschränkten Gebiet des Phasenraumes durchgeführt. In den Beispielen aus Kapitel 4.5 ist das Gebiet (in normierten Größen):

$$r \in [0, r_m = 1.6]$$

$$v \in [0, v_m = 3.5]$$

$$\mu \in [-1, 1]$$

Das Gebiet wurde durch $(n_r = 67) \times (n_v = 99) \times (n_\mu = 35)$ Punkte aufgelöst. Die eine Hälfte der Punkte konstituiert dabei das Zwischengitter (analog zu (4.21)) und die andere Hälfte steht für das Gitter zu ganzen Zeitschritten zur Verfügung. Um singuläre Koeffizienten, die das Lax-Wendroff Schema instabil machten, zu vermeiden, wurde $\bar{f}$ an den Stellen $r = 0, v = 0$ nicht berechnet sondern extrapoliert (siehe z.B. Shlosman et al. 1979). Bei $r = r_m$ und $v = v_m$ wurde $\bar{f}$ zu 0 angenommen, so daß $\psi(r = r_m) = -1/r_m$ gilt. Randbedingungen für $\mu = \pm 1$ sind nicht nötig.

4.5 Beispiele und Vergleich

Bei der Konstruktion der Modellrelaxation sind wir davon ausgegangen, daß die Anfangsverteilung keinen Gesamtdrehimpuls aufweist, ansonsten aber beliebig ist. Dies bedeutet, daß die Dynamik des Systems im allgemeinen drei-dimensional im Ortsraum ablaufen wird. Implizit haben wir diese Dreidimensionalität der Dynamik (nicht des Gleichgewichtes) sogar gefordert, denn nur in diesem Falle ist es stets möglich, daß das System im Impulsraum vollständig relaxiert (durch Streuung am zeitlich veränderlichen Gravitationspotential). Durch die Forderung der Kugelsymmetrie im Ortsraum für die gesamte dynamische Entwicklung wird damit nicht nur die Freiheit in der Wahl der Anfangsbedingungen eingeschränkt, sondern wir erhalten auch noch zwei zusätzliche Konstanten der Bewegung, die bei der Berechnung des assoziierten Gleichgewichtes und bei der Konstruktion der Modellrelaxationen unberücksichtigt blieben. Bei der Wahl einer beliebigen kugelsymmetrischen Anfangsverteilung können wir deshalb nicht immer mit einer guten Übereinstimmung mit der Modellrelaxation rechnen, denn die Relaxation im Impulsraum könnte, durch die künstliche Annahme der vollständigen Kugelsymmetrie während der gesamten dynamischen Entwicklung, unvollständig sein. Dieses Problem können wir dadurch umgehen, daß wir nur solche Anfangsverteilungen zulassen, die in gewissem Sinne im Impulsraum bereits relaxiert sind. Genauer gesagt, betrachten wir nur solche Anfangsverteilungen, die bei gegebener Gedächtnisfunktion $g(\varphi)$ und gegebener Ortsabhängigkeit der Verteilungsfunktion, eine die Energie minimierende Geschwindigkeitsabhängigkeit aufweisen. Erlaubt man für eine beliebige Verteilung $f(\vec{r}, \vec{v})$ inkompressible Umverteilungen im Geschwindigkeitsraum für jedes feste $\vec{r}$, so erhält man mit Hilfe einer Schwarz-Symmetriesierung (siehe z.B. Garabedian 1964 oder Aly 1989), daß die mit $g(\varphi)$ konsistente Verteilung $f(\vec{r}, |\vec{v}|)$ eine Verteilung niedrigster

Energie ist. Die Klasse der bereits teilrelaxierten Verteilungsfunktionen (d.h. diejenigen Verteilungsfunktionen die im Geschwindigkeitsraum bereits teilrelaxiert sind) ist natürlich wesentlich größer als die Angegebene, denn z.B. alle aus $f(\vec{r}, |\vec{v}|)$ dynamisch zugänglichen Verteilungsfunktionen haben die gleiche Energie, diese sind aber nicht so leicht anzugeben. Unsere Anfangsverteilungen werden also immer die Gestalt $f_0(r, v)$ haben. Die Wahl der Anfangsbedingungen unterliegt zudem Einschränkungen rechentechnischer Art. Die anschauliche Interpretation des zum Anfangszustand assoziierten Gleichgewichtes, als einen Zustand, um den (in geeignetem Sinne, siehe Kapitel 2) das System im Laufe seiner exakten dynamischen Entwicklung schwingt, legt nahe, daß die dynamische Entwicklung eines Systems um so heftiger ablaufen sollte, je weiter ein Anfangszustand von seinem assoziierten Gleichgewicht entfernt ist. Diese Anschauung wird durch die dynamischen Rechnungen auch qualitativ bestätigt. Dies bedeutet aber für unsere numerischen Rechnungen, daß bei großem energetischen Abstand ein weiter Bereich des Phasenraumes mit einem feinen Gitter abgedeckt werden müßte, um die numerischen Fehler während der gesamten dynamischen Rechnung klein zu halten. Da dies aus Kostengründen mit unserem festen Gitter nicht möglich ist, können wir nur Fälle hinreichend "moderater" Dynamik behandeln. In unseren Beispielen ändert sich etwa die zentrale Massendichte nur um einen Faktor 10 im Laufe der Dynamik. Da dies bedeutet, daß wir nur Anfangsverteilungen behandeln können, die nicht sehr weit weg von ihrem assoziierten Gleichgewicht sind, müssen wir diese Einschränkung bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigen. Bei heftigerer Dynamik können zwar immer noch Ergebnisse mit akzeptablen Fehlern in der Gesamtmasse oder der Gesamtenergie erzielt werden, jedoch kommt es wegen starker Gradienten (durch das Gitter schlecht aufgelöst) im Laufe der Entwicklung zu einer Gitterdiffusion, so daß die numerischen Lösungen nicht mehr einer stoßfreien Dynamik entsprechen. In diesem Sinne sind einige, in der Literatur vorgestellte, numerische Rechnungen kritisch zu betrachten.

Die primäre Aufgabe unserer dynamischen Rechnungen ist es natürlich, die Realitätsnähe unserer Modellrelaxationen zu prüfen. Es werden deshalb Vergleiche der Ergebnisse angestellt werden. Dazu werden wir allerdings lediglich das Relaxationsmodell gemäß (3.45) benutzen, da die Genauigkeit der numerischen Rechnungen nicht ausreicht, um zwischen den beiden vorgestellten Modellen zu diskriminieren und da (3.45) wesentlich leichter (analytisch) zu behandeln ist (siehe Anhang A). Daneben sollen die Beispiele aber auch so gewählt werden, daß der Einfluß der Anfangsbedingungen auf die Endgleichgewichte im Rahmen der Modellrelaxation und der dynamischen Rechnungen illustriert werden kann. Diese Frage wurde in der Literatur kontrovers diskutiert und ihre Beantwortung wurde vor allem durch eine Vielzahl numerischer Simulationen versucht. Während in älteren Arbeiten (z.B. Lynden-Bell 1967, Gott III 1973, Shu 1978) die Ansicht vertreten wird, der Einfluß der Anfangsbedingungen sei, bis auf die Abhängigkeiten von Gesamtmasse und Gesamtenergie gering, betonen neuere numerische Arbeiten (z.B. Shlosman et al. 1979, Hoffman et al. 1979, van Albada 1982, May & van Albada 1984, Tanekusa 1987) eine starke Abhängigkeit der Endzustände von den Anfangsbedingungen. Neben Masse und Energie werden dabei die verschiedensten Parameter, etwa das anfängliche Virialverhältnis zur Charakterisierung der Anfangszustände herangezogen. Vielfach werden die Endzustände auch durch Anpassung an empirische Massenverteilungsgesetze, wie das Gesetz von de Vaucouleurs (1953), charakterisiert (z.B. van Albada 1982). Andere Autoren (z.B. Binney 1976, 1982) entnehmen ihren dynamischen Rechnungen, daß stoßfreie Relaxation in der Regel unvollständig ist, da sich entgegen den Vorhersagen der Modelle von Lynden-Bell (1967) (für den Grenzfall verschwindender Entartung) und Shu (1978) keine Maxwellverteilungen im Geschwindigkeitsraum einstellen. Binney erklärt sich die Abhängigkeiten der Endzustände von den Anfangsbedingungen aus einer "Ineffektivität" der dynamischen Relaxation.

Mit unserer Modellrelaxation erhält man für Systeme ohne Gesamtdrehimpuls (nur davon ist hier die Rede) folgende konkrete Vorhersagen zu diesem Problem: Das Endgleichgewicht wird, außer von der Gesamtenergie, nur von $g(\varphi)$ bestimmt. Nimmt man ferner an, daß die Operatorklasse (3.45) realistische Ergebnisse liefert, so gilt für Systeme gleicher Masse und gleicher Gesamtenergie außerdem:

- Unterscheiden sich die Gedächtnisfunktionen zweier Anfangsverteilungen nur durch eine Ähnlichkeitstransformation, so wird zwar die dynamische Entwicklung im allgemeinen unterschiedlich sein, die Endzustände auf großen Skalen sind aber gleich.
- Sind die Gedächtnisfunktionen zweier Anfangsverteilungen nicht (auch nicht annähernd) durch eine Ähnlichkeitstransformation ineinander überführbar, so werden sich die Endzustände im allgemeinen unterscheiden.

Ähnliche Aussagen gelten natürlich auch für andere Klassen von Mittelungsoperatoren, sofern diese nur universell (d.h. für eine große Klasse von Anfangsbedingungen) realistische Resultate liefern.

Die hier vorgestellten Beispiele sind deshalb nach den oben genannten Kriterien ausgewählt. In der Normierung von Kapitel 3.2 haben sie folgende Gestalt:

$$f_0(r, v, \mu) = \frac{1}{C} \begin{cases} (1-r)^a (1-v/v_{max})^b & r \leq 1 \wedge v \leq v_{max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.42)$$

mit C als Normierungskonstante und $v_{max} < \sqrt{2}$ damit alle Teile des Systems energetisch gebunden sind. Bei allen drei Beispielen beträgt die Gesamtenergie

$$E_0 = -0.5$$

in Einheiten von GM^2/r_{typ} . Die kinetische Energie der Anfangsverteilungen ist dabei

$$E_{kin} = \frac{6}{(b+4)(b+5)} v_{max}^2 \quad (4.43)$$

Beispiel 1)

Wir wählen

$$a_1 = 2 \quad b_1 = 1 .$$

Damit sich die Gesamtenergie $E_0 = -0.5$ ergibt ist

$$v_{max,1} \approx 1.4015 .$$

Daraus ergibt sich für die Energie des zum Anfangszustand assoziierten Gleichgewichtes

$$W_{\psi_1^*} \approx -0.5519 ,$$

und nach (3.49) erhalten wir für den Mittelungsparameter α , der zu einem Endgleichgewicht auf großen Skalen führt

$$\alpha_1 \approx 1.1597 .$$

Beispiel 2)

Für das zweite Beispiel konstruieren wir f_0 so, daß sich die Gedächtnisfunktion der exakten Verteilungsfunktion nur durch eine Ähnlichkeitstransformation von der Gedächtnisfunktion aus Beispiel 1) unterscheidet. In diesem Falle sind die Endzustände auf großen Skalen im Rahmen der Modellrelaxation gleich. Dazu vertauschen wir in (4.42) die Exponenten a und b wodurch die Gedächtnisfunktion ungeändert bleibt.

$$a_2 = 1 \quad b_2 = 2$$

Um die Energie $E_0 = -0.5$ zu erreichen, verändern wir den Parameter v_{max} zu

$$v_{max,2} \approx 1.3038 .$$

Dies entspricht (wegen des Normierungsfaktors in (4.42)) gerade einer Ähnlichkeitstransformation auf $g(\varphi)$ mit

$$g_2(\varphi) = \frac{1}{k} g_1(\varphi/k)$$

mit $k = (v_{max,2}/v_{max,1})^3$. Daraus erhält man

$$W_{\psi_2^*} \approx -0.6377$$

und

$$\alpha_2 \approx 1.4404 .$$

Beispiel 3)

Für das dritte Beispiel wählen wir f_0 so, daß die Modellrelaxation einen anderen Endzustand auf großen Skalen als in den Beispielen 1) und 2) vorhersagt. E_0 sei wiederum -0.5 und die Anfangsverteilung soll sogar die gleiche Ortsraumdicke und damit das gleiche Virialverhältnis wie in Beispiel 2) haben. Wir wählen deshalb

$$a_3 = 1 \quad b_3 = 0.1$$

$$v_{max,3} \approx 0.9200 .$$

Es ergibt sich

$$W_{\psi_3^*} \approx -0.6674$$

und

$$\alpha_3 \approx 1.5422 .$$

Die Ergebnisse der dynamischen Rechnungen sind, zusammen mit den Ergebnissen der Modellrelaxation, in den Abbildungen 4.4 bis 4.10 für alle drei Beispiele dargestellt. Die Abbildungen 4.4 bis 4.7 sowie Abbildung 4.10 geben dabei ein grobes Bild von der Dynamik der Systeme (siehe auch Anhang C für einige Darstellungen des

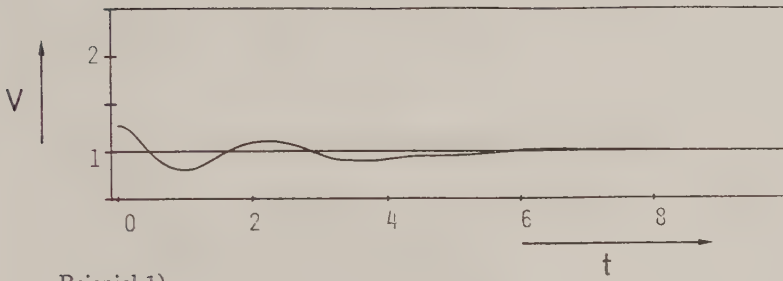
Phasenraumes). In den Abbildungen 4.4 ist der zeitliche Verlauf eines Virialverhältnisses V für die Beispiele 1), 2) und 3) aufgetragen. Wählt man, wegen der Mittelung der Anfangsverteilungen gemäß (4.26) und (4.27) V zu $V = -E_0/(E_{kin} - 1.5v_0^2)$, so sollte es bei der Relaxation in ein Gleichgewicht gegen 1 gehen. Man erkennt, daß die Systeme im wesentlichen eine mehr oder weniger starke Schwingung vollführen, um dabei rasch gedämpft zu werden. In allen Fällen ist $V \approx 1$ (bis auf kleine Rest-Schwingungen und numerische Fehler) nach etwa 6 dynamischen Zeiten (in der Normierung von Kapitel 3.2) erreicht.

Ein ähnliches Verhalten erkennt man in Abbildung 4.5 an den Zentraldichten als Funktionen der Zeit. Auch hier ist im wesentlichen eine Schwingung (über etwa eine Größenordnung) und rasche Dämpfung zu erkennen, so daß ab $t \approx 6$ praktisch ein Gleichgewicht erreicht wird. Zusätzlich sind die Vorhersagen über die Zentraldichten aus unserer Modellrelaxation eingezeichnet und man erkennt schon hier eine ausgesprochen gute Übereinstimmung.

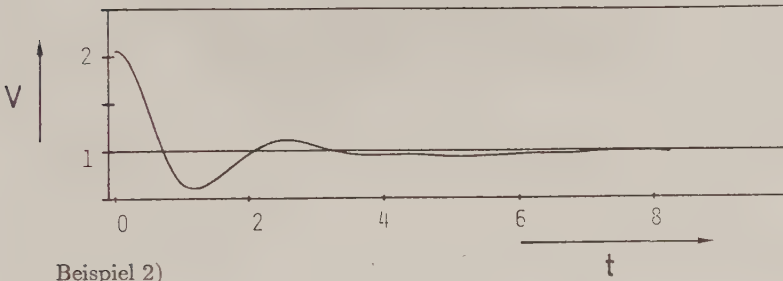
Die Dichten als Funktion der Orte und der Zeit sind in perspektivischer Darstellung noch einmal in Abbildung 4.6 gezeigt.

Abbildung 4.7 zeigt die Entwicklung der Boltzmann-Entropie auf großen Skalen. Der Sprung bei $t = 0$ resultiert aus der Mittelung der Anfangsverteilung gemäß (4.26) und (4.27). Man erkennt in allen Fällen einen deutlichen Anstieg der Entropie, was nach Kapitel 4.3 auf eine Filamentierung der exakten Verteilungsfunktion schließen läßt. Wie erwartet sind die Entropien der Endzustände aus den Beispielen 1) und 2) praktisch gleich und unterschiedlich von derjenigen des Beispiels 3).

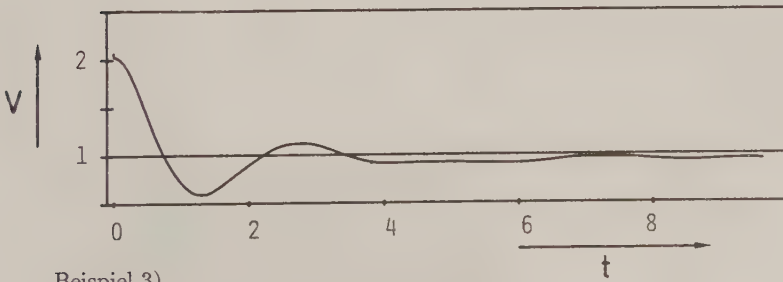
Für einen genaueren Vergleich mit der Modellrelaxation wollen wir nicht die Verteilungsfunktionen selbst, sondern die Ortsraum-Massendichten heranziehen, denn aufgrund der besonderen Mittelung der Dynamik gemäß (4.26) und (4.27) ist ein Vergleich im Ortsraum besonders leicht durchzuführen, da sich die Mittelung der Dynamik hier nicht auswirkt. Will man z.B. einen Vergleich der Verteilungsfunktionen



Beispiel 1)



Beispiel 2)



Beispiel 3)

Abb. 4.4 Virialverhältnis $V = -E_0 / (E_{kin} - 1.5v_0^2)$ als Funktion der Zeit für die Beispiele 1), 2) und 3).

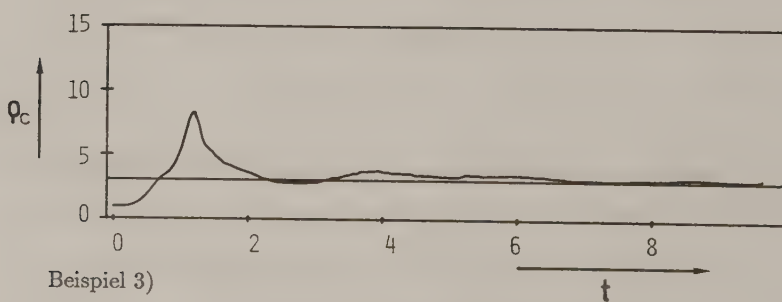
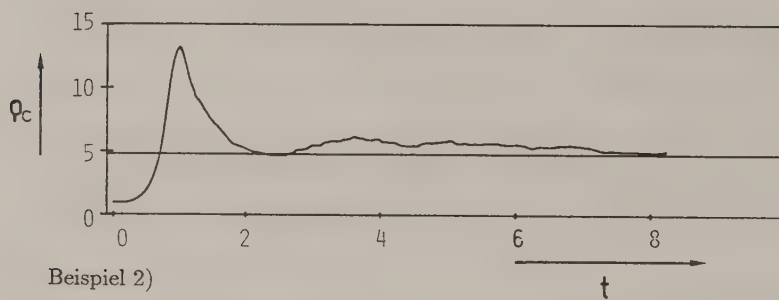
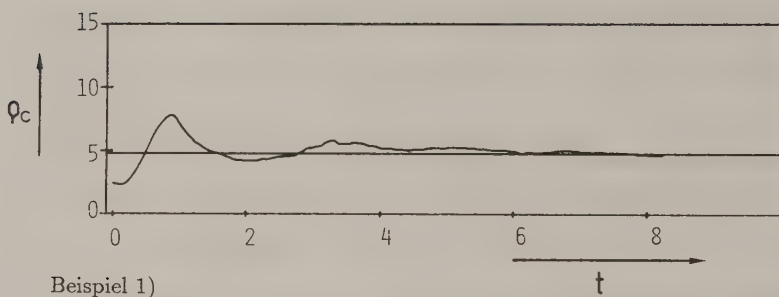
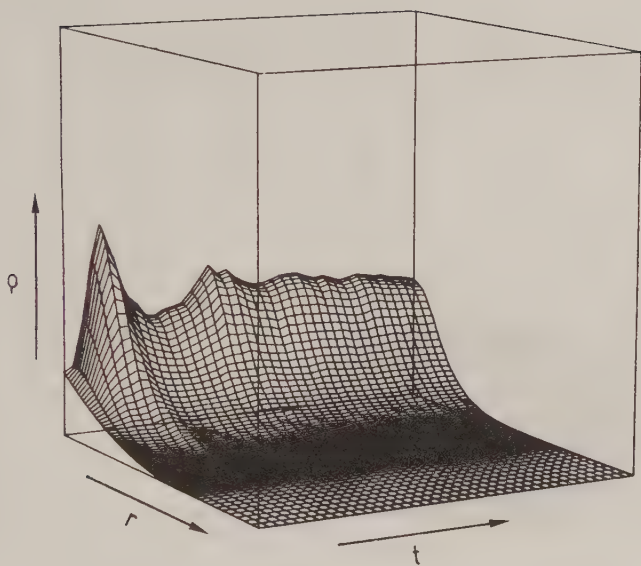
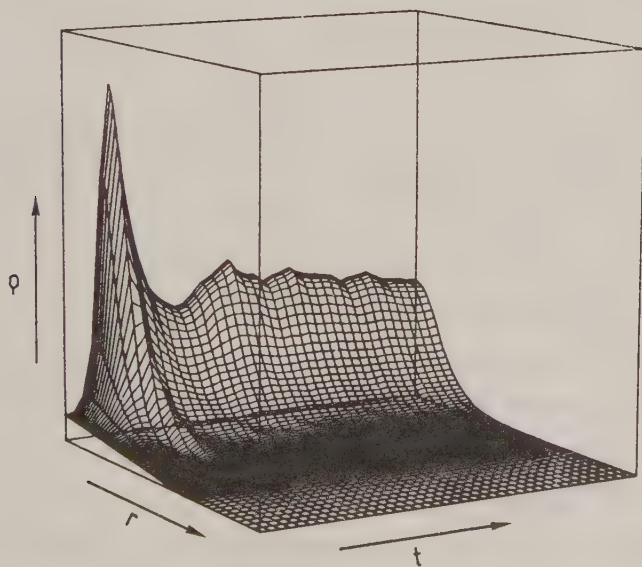


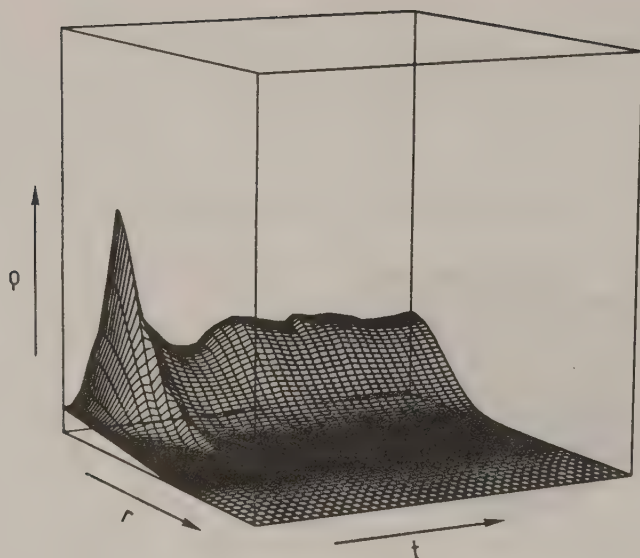
Abb. 4.5 Zentraldichten als Funktionen der Zeit für die Beispiele 1), 2) und 3). Die horizontalen Linien stellen die Vorhersagen über die Zentraldichten der Endverteilungen aus der Modellrelaxation dar.



Beispiel 1)



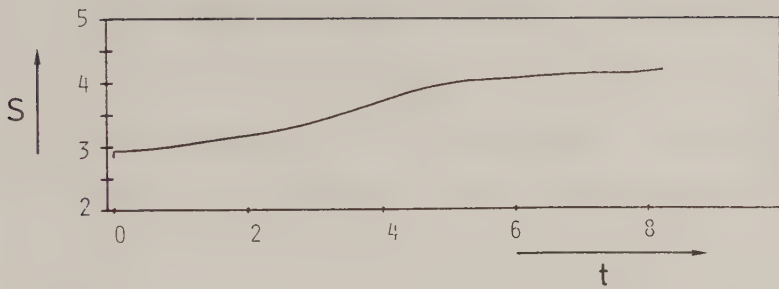
Beispiel 2)



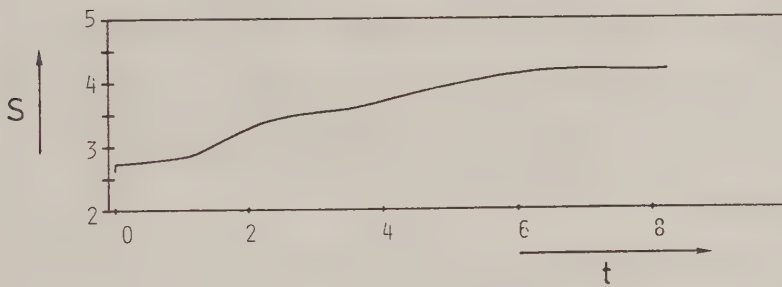
Beispiel 3)

Abb. 4.6 Dichten als Funktionen des Ortes und der Zeit für die Beispiele 1),2) und 3). ρ ist von 0 bis 15, r von 0 bis 1.6 und t von 0 bis 8 skaliert.

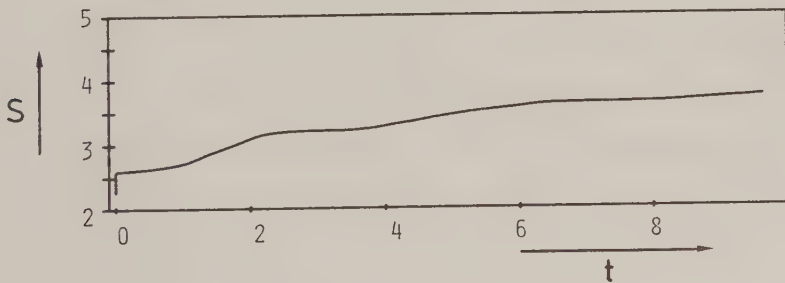
im Geschwindigkeitsraum durchführen, so ist zu berücksichtigen, daß die Gleichgewichte im Rahmen der gemittelten Dynamik nicht die Gestalt $\bar{f}(h)$ haben, sondern $\bar{f} = L * f$ dann ein Gleichgewicht ist, falls $f = f(h)$ gilt (siehe auch Anhang C). In Abbildung 4.8 sind die Dichten der Anfangsverteilung, die Dichten der zu den Anfangsverteilungen assoziierten Gleichgewichte und die Dichten der Endgleichgewichte aus unserer Modellrelaxation dargestellt. Daneben finden sich in Abbildung 4.8 auch die Dichteverteilungen am Ende unserer dynamischen Rechnungen. Dabei wurden die Dichten jeweils über die letzte gerechnete dynamische Zeit gemittelt. Weiterhin sind die Maxima und Minima innerhalb dieser dynamischen Zeit, sowie die aus Massen- und Energieerhaltung abgeschätzten numerischen Fehler eingezeichnet. Die numerischen Fehler in Masse und Energie betragen dabei etwa 10% der Gesamtmasse



Beispiel 1)



Beispiel 2)



Beispiel 3)

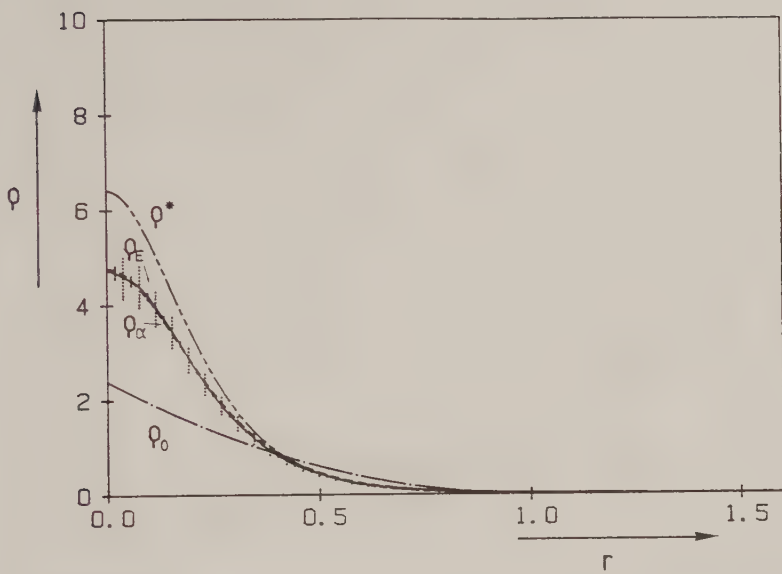
Abb. 4.7 Boltzmann-Entropie als Funktion der Zeit für die Beispiele 1), 2) und 3).

und Gesamtenergie bei $t = 8$ (d.h. nach etwa 50000 Integrationsschritten). Dies ist bei einem Schema zweiter Ordnung und der gegebenen Auflösung nicht anders zu erwarten (siehe auch Anhang B). Die numerischen Fehler sind damit bei $t = 8$ größer als die verbleibenden Schwingungen der Dynamik, so daß es keinen Sinn macht, die Dynamik wesentlich weiter zu verfolgen. In allen drei Fällen sieht man, daß die Dichteverteilungen aus den dynamischen Rechnungen und aus der Modellrelaxation, im Rahmen der Genauigkeit der Numerik, sehr gut übereinstimmen.

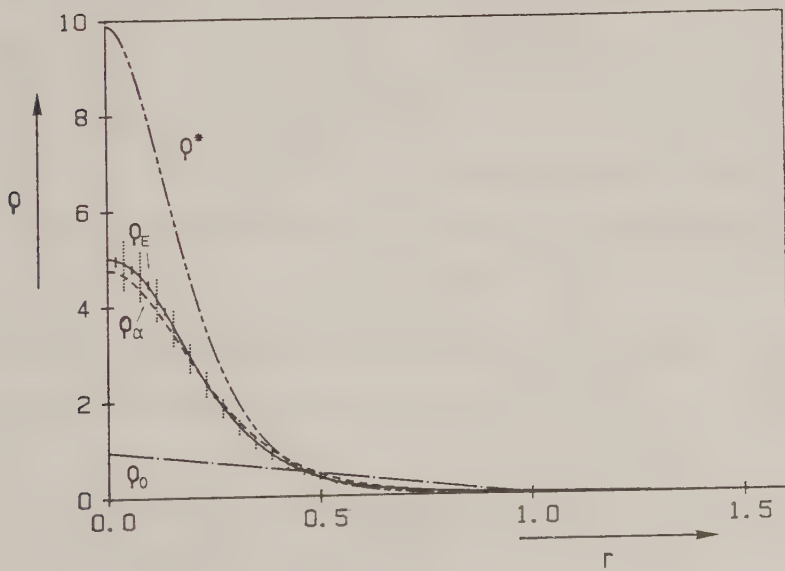
Das gleiche Verhalten sieht man an den Dichteverteilungen in doppelt-logarithmischem Auftrag (Abbildung 4.9). Die Abweichungen bei sehr kleinen Dichtewerten (große r) sind dabei wahrscheinlich auf numerische Diffusion zurückzuführen, denn in diesen Bereichen ist das numerische Gitter bereits relativ grob. Aufgrund der Kugelsymmetrie wirken sich diese Abweichungen jedoch nicht auf den zentralen Bereich der Systeme aus.

Zum direkten Vergleich der drei Beispiele sind in Abbildung 4.10 noch einmal die Zentraldichten als Funktion der Zeit zusammen mit den Modellvorhersagen aufgetragen. Man erkennt, daß trotz teilweise deutlich unterschiedlicher Dynamik die Zentraldichten aus den Beispielen 1) und 2) wie vorhergesagt in etwa den gleichen Wert annehmen, der von demjenigen des Beispiels 3) deutlich unterschiedlich ist.

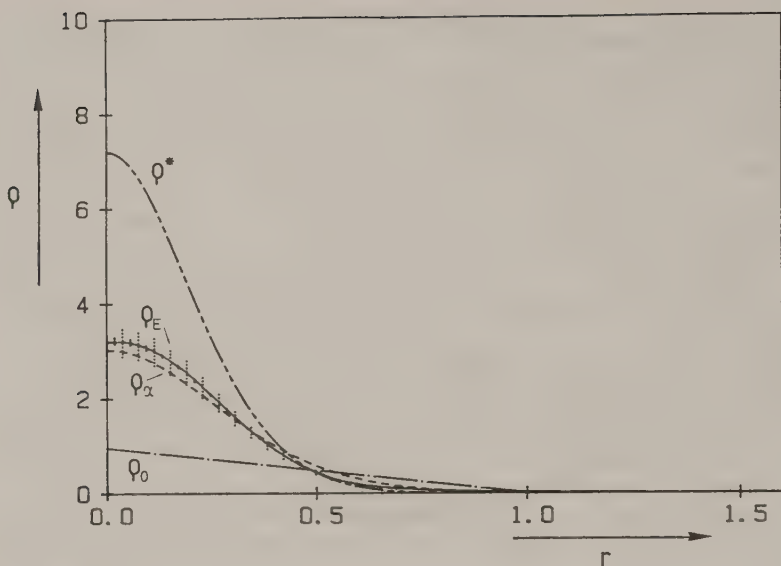
Aus den signifikanten Unterschieden zwischen den Endgleichgewichten aus Beispiel 1) und 2) einerseits und Beispiel 3) andererseits darf man aber nicht schließen, daß die Endgleichgewichte, in dem beschriebenen Sinne, stets stark von Details der Anfangsverteilungen abhängen. Wie in Kapitel 3.2 angedeutet ist dies nur dann immer der Fall, wenn die Anfangsbedingungen noch relativ nahe an ihrem assoziierten Gleichgewicht liegen, so daß anschaulich gesprochen nicht allzuviel des Gedächtnisses an die Anfangsverteilungen verloren geht. Für Fälle, bei denen sehr viel Energie dissipativ umgesetzt werden muß, um zu einem Gleichgewicht auf großen Skalen zu kommen, wird fast das gesamte Gedächtnis an die Anfangsverteilung verlorengehen,



Beispiel 1)



Beispiel 2)

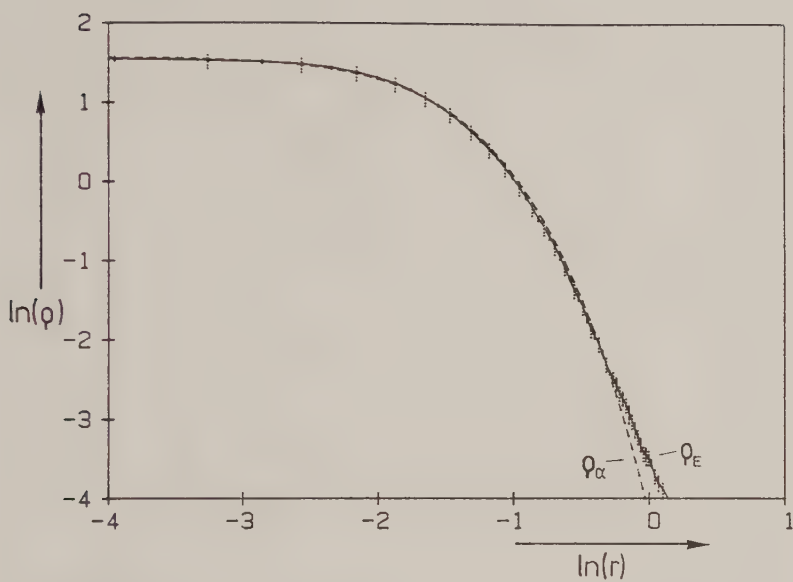


Beispiel 3)

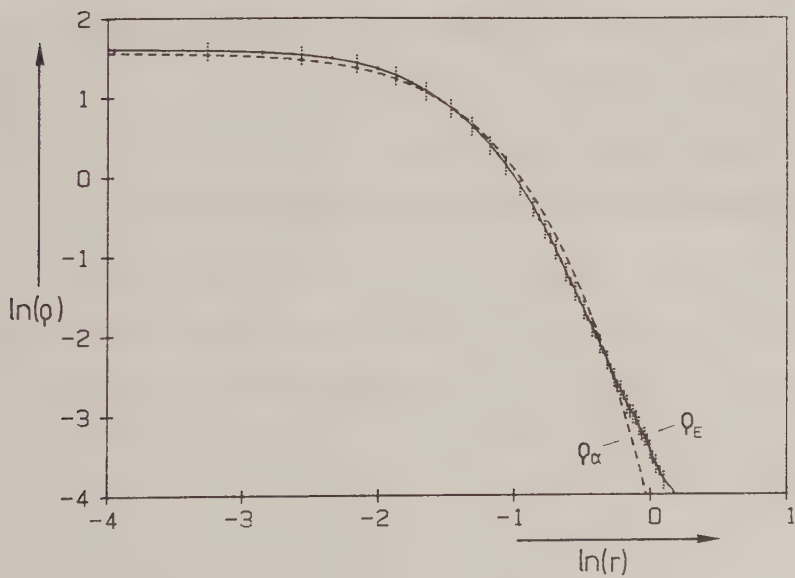
Abb. 4.8 Dichten als Funktionen des Ortes für die Beispiele 1), 2) und 3). ρ_0 ist die Dichte der Anfangsverteilung, ρ^* ist die Dichte des zum Anfangszustand assoziierten Gleichgewichtes. ρ_a ist die Dichte der Endverteilung aus der Modellrelaxation. ρ_E ist die Dichte aus der dynamischen Rechnung, die über die letzte gerechnete dynamische Zeit gemittelt wurde. Die durchgezogenen senkrechten Striche deuten die Rest-Dynamik an. Die gepunkteten senkrechten Striche geben eine Abschätzung über den numerischen Fehler an.

so daß sich Details der Anfangsbedingungen (relativ gesehen) weniger stark auswirken. Diese Fälle konnten aber aus den genannten Gründen numerisch nicht behandelt werden (siehe auch Kapitel 6).

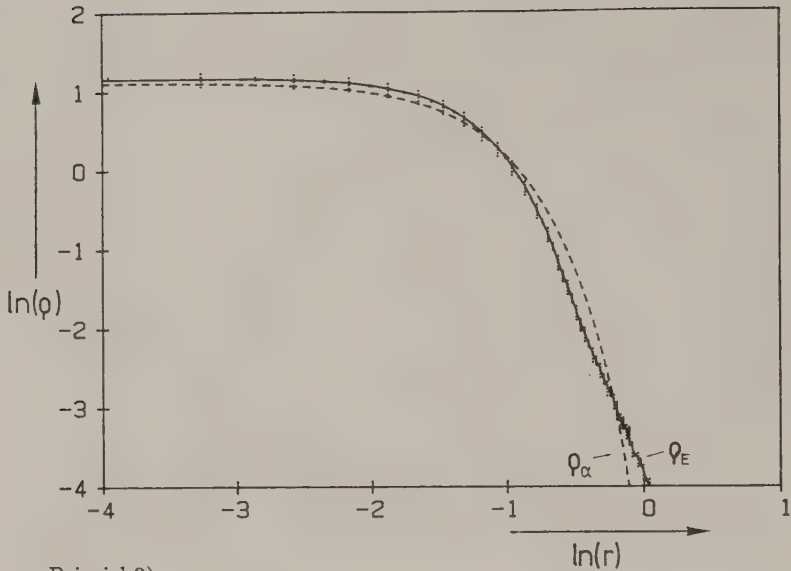
Es ist also zusammenfassend festzuhalten, daß sich die Vorhersagen der Modellrelaxationen in allen bisher gerechneten Fällen (auch in hier nicht dargestellten Fällen,



Beispiel 1)



Beispiel 2)



Beispiel 3)

Abb. 4.9 Dichten als Funktionen des Ortes in doppelt-logarithmischem Auftrag für die Beispiele 1), 2) und 3). ϱ_α ist die Dichte der Endverteilung aus der Modellrelaxation. ϱ_E ist die Dichte aus der dynamischen Rechnung, die über die letzte gerechnete dynamische Zeit gemittelt wurde. Die durchgezogenen senkrechten Striche deuten die Rest-Dynamik an. Die gepunkteten senkrechten Striche geben eine Abschätzung über den numerischen Fehler an.

siehe auch Ziegler & Wiechen 1989) in sehr guter Übereinstimmung mit den dynamischen Rechnungen sind. Die in Kapitel 4.1 zusammengefaßten Annahmen über die dynamische Relaxation (Wahl des Mittelungsoperators, Annahme der vollständigen Relaxation im Sinne des Modells) scheinen also, zumindest für die behandelten Beispiele, realistisch zu sein.

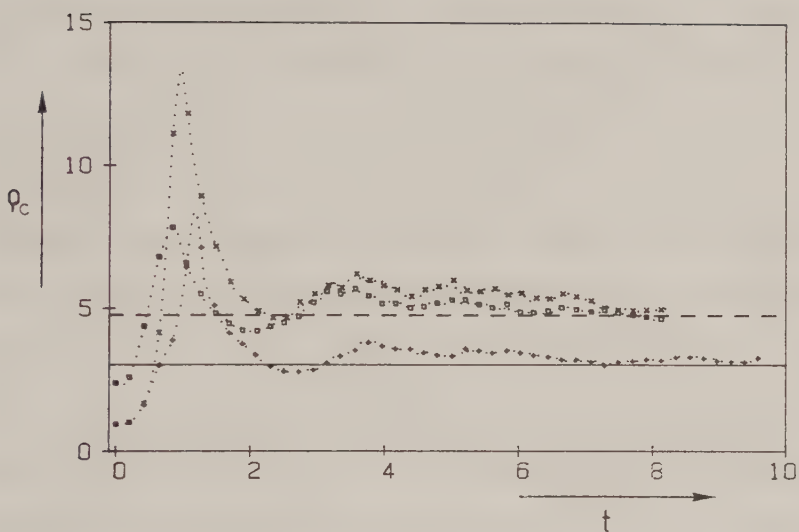


Abb. 4.10 Zentraldichten als Funktionen der Zeit für die Beispiele 1), 2) und 3) zusammen mit den Modellvorhersagen.

5. Anmerkungen zum Fall mit Gesamtdrehimpuls

In dem bis hierher vorgestellten Modell wurden nur sehr wenige Informationen über die Dynamik der Systeme berücksichtigt. Diese waren Phasenvolumenerhaltung auf der Ebene der exakten Dynamik, sowie Mischung, Energie- und Massenerhaltung auf der Ebene der grobskaligen Dynamik. Spätestens bei der Einbeziehung realistischer Anfangsbedingungen mit nicht verschwindendem Gesamtdrehimpuls müssen weitere Bedingungen berücksichtigt werden.

Eine naheliegende Verallgemeinerung ist es, hierbei zusätzlich die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses $\vec{L}_0$ bei der Konstruktion des zum Anfangszustand assoziierten Gleichgewichtes zu berücksichtigen. Setzt man, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, den linearen Impuls zu Null und den Drehimpuls zu $\vec{L} = L_z \vec{e}_z =: L \vec{e}_z$ so ist

$$L = \int v_\phi r f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 r d^3 v = L_0 \quad (5.1)$$

die zusätzliche Bedingung. Unter Verwendung eines Lagrangeparameters λ kann damit das zum Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht weitgehend analog zu Wiechen et al. (1988) formal berechnet werden (Stahl et al. 1989). Die zu (2.12) analoge Euler-Lagrange-Gleichung ergibt sich zu

$$\Delta \psi(\vec{r}) = 4\pi G \int f_{\psi, \lambda}(\tilde{h}(\xi)) d^3 v \quad (5.2)$$

mit

$$\tilde{h} = \frac{v^2}{2} + \psi(\vec{r}) + \lambda v_\phi r \quad (5.3)$$

$$f_{\psi, \lambda}^*(\tilde{h}) = g(\varphi_{\psi, \lambda}(\tilde{h})) \quad (5.4)$$

$$\varphi_{\psi, \lambda}(\tilde{h}) = \int \Theta(\tilde{h} - \tilde{h}'(\xi)) d\xi \quad (5.5)$$

und

$$L_0 = \int v_\phi r f_{\psi, \lambda}^*(\tilde{h}(\xi)) d\xi. \quad (5.6)$$

Damit ist $f_{\psi,\lambda}^*$ formal im Mittel starr rotierend und hat den Gesamtdrehimpuls L_0 . Es ergibt sich jedoch, daß nur $\lambda \rightarrow 0$ und

$$I = \int r^2 f_{\psi,\lambda}^* (\tilde{h}(\xi)) d\xi \rightarrow \infty \quad (5.7)$$

zum Drehimpuls L_0 führt. Damit hat $f_{\psi,\lambda}^*$ die gleiche Gestalt wie im Falle verschwindenden Gesamtdrehimpulses, wobei lediglich der Gesamtdrehimpuls L_0 bei $r \rightarrow \infty$ lokalisiert ist, ohne Phasenvolumen, Masse oder Energie zu tragen. Damit erhalten wir eine obere Abschätzung für die zur dissipativen Umsetzung freie Energie ΔE . Verführe man nun analog zu Kapitel 3 zur Berechnung der Endzustände auf großen Skalen, so ergäben sich praktisch die gleichen Endzustände wie im Falle verschwindenden Gesamtdrehimpulses. Dies bedeutete für die Dynamik der Systeme, daß der gesamte Drehimpuls von einem verschwindenden Teil der Verteilungsfunktion ohne Energie nach $r \rightarrow \infty$ transportiert werden müßte. Ein solches Verhalten ist aber, zumindest für typische Anfangsbedingungen, nicht zu erwarten. Die zusätzliche Forderung der Erhaltung des Gesamtdrehimpulses ist damit zu schwach, um realistische Ergebnisse für die Relaxation mit Drehimpuls zu liefern. Weitere dynamische Bedingungen sind notwendig.

Eine sehr weitgehende Bedingung ist es, hierbei die Rotationssymmetrie für die Dynamik zu fordern, so daß nicht nur der Gesamtdrehimpuls L_0 , sondern auch der Einzelteilchendrehimpuls p_ϕ Konstante der Bewegung der exakten stoßfreien Dynamik ist. Für allgemeine Anfangsbedingungen ist zwar auch dies keine realistische Bedingung, jedoch kann sie für die letzte, relativ ruhige Phase der Relaxation oft, zumindest näherungsweise, erfüllt sein. Auf jeden Fall erhalten wir so eine untere Schranke für die zur dissipativen Umsetzung freien Energie ΔE im Rahmen unseres Modells. Für diesen Fall ist die Konstruktion des zum Anfangszustand assoziierten Gleichgewichtes weitgehend analog zu der Arbeit von Schindler & Goldstein (1983, für den Plasmafall mit Translationsinvarianz) durchführbar (Stahl et al. 1989). Da

$\frac{\partial}{\partial \phi}(\cdot) = 0$ und p_ϕ Konstante der Bewegung ist, kann die Minimierung der Energie zu festem ψ und unter Berücksichtigung der Phasenvolumenerhaltung in einem vierdimensionalen Unterraum des Phasenraumes erfolgen. Mit

$$\varphi(g, p_\phi) = \int \Theta(f_0(\vec{r}, \vec{p}) - g) d\Omega \quad (5.8)$$

$$d\Omega = 2\pi dr dz dp_r dp_z \quad (5.9)$$

ist die Gedächtnisfunktion $g = g(\varphi, p_\phi)$ zweidimensional. Die Euler-Lagrange-Gleichung für das zum Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht ergibt sich damit zu

$$\Delta\psi(r, z) = 4\pi G \int f_\psi^*(h(\vec{p}, \vec{r}), p_\phi) d^3v \quad (5.10)$$

mit

$$h(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_z^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}) + \psi(r, z) \quad (5.11)$$

$$f_\psi^*(h, p_\phi) = g(\varphi_\psi(h, p_\phi), p_\phi) \quad (5.12)$$

$$\varphi_\psi(h, p_\phi) = \int \Theta(h - h'(\vec{p}, \vec{r})) d\Omega. \quad (5.13)$$

Das Verfahren entspricht damit in den Unterräumen $p_\phi = \text{konst} \forall p_\phi$ dem in Kapitel 2 beschriebenen Verfahren. Anders als in Gleichungen (5.2) bis (5.7) ist das Trägheitsmoment des zum Anfangszustand assoziierten Gleichgewichtes i.a. beschränkt und f_ψ^* ist i.a. nicht starr rotierend. Die Modellierung des Relaxationsprozesses kann völlig analog zu Kapitel 3 erfolgen, wobei man aber nun die zusätzliche Freiheit hat, die Gedächtnisreduktion im φ -Raum und im p_ϕ -Raum getrennt zu modellieren. Letzteres muß natürlich durch Mittelungsoperatoren, die nicht nur die Gesamtmasse sondern auch den Gesamtdrehimpuls unberührt lassen, erfolgen. Ein Beispiel für eine im Sinne von Kapitel 3.1 erlaubte Operatorklasse ist

$$g(\varphi, p_\phi) \longrightarrow \frac{1}{\alpha} g(\varphi/\alpha, p_\phi) = \bar{g}(\varphi, p_\phi) \quad (5.14)$$

$$\bar{g}(\varphi, p_\phi) \longrightarrow \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \int \exp\left(-\frac{(p_\phi - p'_\phi)^2}{2\beta^2}\right) \bar{g}(\varphi, p'_\phi) dp'_\phi = \bar{\bar{g}}(\varphi, p_\phi). \quad (5.15)$$

Die so zu berechnenden Gleichgewichte sind stoßfrei global stabil, solange die betrachteten Störungen ebenfalls rotationssymmetrisch sind. Die erwarteten Gleichgewichtsstrukturen sind linsenförmig oder weisen Ringstrukturen auf (Seboldt 1982). Für die Abplattung bei linsenförmigen Strukturen ist dabei die Drehimpulsverteilung, nicht aber der Gesamtdrehimpuls maßgeblich. Eine qualitative Abschätzung zeigt, daß solche linsenförmigen Strukturen für zu große Abplattung schon linear instabil werden (Seboldt 1982), so daß hier Ringsysteme Lösung der Modellrelaxation sein werden.

Beide vorgestellten Zugänge reichen nicht aus, um für allgemeine Fälle realistische Endzustände zu berechnen. Das folgende Szenario erscheint plausibel: In einer ersten, sehr heftigen Phase der Dynamik verlassen Teile des Systems den gravitativ gebundenen Teil und tragen Masse, Energie und Drehimpuls nach $r \rightarrow \infty$. Diese Teile haben an der Relaxation nicht mehr teil. Eine quantitativ richtige Beschreibung der Systeme im Rahmen eines Relaxationsmodells scheint, unter Einbeziehung auch dieser Phase der Dynamik, kaum möglich, da es hierbei auf viele Details der Anfangsverteilung ankommen wird. In einer zweiten Phase der Dynamik gehen keine (oder kaum mehr) Teile des Systems mehr verloren. Die Verteilungsfunktion weist aber i.a. keine Symmetrie auf, so daß eine Relaxation im Drehimpulsraum effektiv ist. Eine Modellierung dieses Teils der Relaxation kann analog zum ersten beschriebenen Fall (L_0 K.d.B.) erfolgen, wobei aber durch zusätzliche (eventuell heuristisch angenommene oder aus Computersimulationen abgeleitete) Bedingungen sicherzustellen ist, daß auch der Drehimpuls nicht mehr nach $r \rightarrow \infty$ verbracht werden kann. Sollte das System im Laufe seiner Entwicklung rotationssymmetrisch werden, so kann der zweite vorgestellte Fall (p_ϕ K.d.B.) zur Beschreibung der letzten, ruhigen Phase der Relaxation benutzt werden.

Die Schwierigkeiten einer realistischen Beschreibung der Systeme nicht verschwindenden Gesamtdrehimpulses liegen also nicht im Prinzip der Modellrelaxation, sondern im Auffinden relevanter dynamischer Informationen (also K.d.B) begründet.

6. Zusammenfassung und Diskussion

Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung eines quantitativen Modells zur Relaxation stoßfrei selbstgravitierender Materie. Das vorgestellte Modell basiert auf der Grundidee, daß die Stärke eines solchen Relaxationsprozesses von der zur dissipativen Umsetzung freien Energie abhängen sollte. Dies ist offensichtlich, denn während Anfangszustände nahe einem global stabilen Gleichgewicht kaum relaxieren können, werden Zustände fern von einem Gleichgewicht einen heftigen Relaxationsprozeß hin zu einem Gleichgewicht durchlaufen. In Abhängigkeit von der Stärke der Relaxation wird dabei mehr oder weniger Information über die Anfangsverteilung erhalten bleiben. Dieses Verhalten wurde auch in zahlreichen numerischen Simulationen gefunden (siehe Zitate aus Kapitel 1).

Unter der Annahme einer Relaxation in ein global stabiles Gleichgewicht ergibt sich die zur dissipativen Umsetzung freie Energie ΔE aus der Energiedifferenz des Anfangszustandes zu seinem assoziierten Gleichgewicht (Wiechen et al. 1988, Wiechen 1989). Im Falle verschwindenden Gesamtdrehimpulses (ohne weitere K.d.B.) ist das assoziierte Gleichgewicht der Zustand niedrigster Energie, der ausgehend von einer Anfangsverteilung f_0 durch eine im Phasenraum inkompressible Abbildung erreicht werden kann. Ein solcher Zustand existiert für alle nicht-singulären Anfangsverteilungen und seine Energie ist beschränkt (Wiechen et al. 1988). Nach Konstruktion ist das zum Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht stoßfrei global stabil und hat die gleiche Entropie aber niedrigere Energie als der Anfangszustand.

Die dynamische Entwicklung der Systeme kann man sich nun als eine komplizierte Bewegung um das zum Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht herum vorstellen. Dabei kann durch Phasenmischung, auf großen Skalen betrachtet, mehr und mehr Nichtgleichgewichtsenergie in Gleichgewichtsenergie überführt werden, bis

schließlich ein stoßfrei global stabiles Gleichgewicht auf großen Skalen erreicht wird. Die quantitative Modellierung dieses Prozesses war Gegenstand dieser Arbeit.

Der Informationsverlust (Entropieerhöhung), der notwendig ist, um zu einem Gleichgewicht auf großen Skalen zu kommen, wurde durch eine geeignete Reduzierung des in $g(\varphi)$ enthaltenden Gedächtnisses an die Anfangsverteilung erreicht. Im Gegensatz zu $f(\xi, t)$ ist $g(\varphi)$ als Konstante der Bewegung der exakten, stoßfreien Dynamik zu allen Zeiten bekannt. Außerdem werden global stabile Gleichgewichte vollständig durch $g(\varphi)$ bestimmt. Die Stärke der Gedächtnisreduktion wird durch die zur dissipativen Umsetzung freien Energie bestimmt. Die Endzustände auf großen Skalen ergeben sich damit als zur reduzierten Gedächtnisfunktion gehörende assoziierte Gleichgewichte der Energie E_0 . Sie sind damit stoßfrei global stabile Zustände gleicher Masse, gleicher Energie aber höherer Entropie als der Anfangszustand. Da die exakte, stoßfreie Dynamik $g(\varphi)$ erhält und die Endzustände auf großen Skalen immer einer geeignet gemittelten exakten Verteilungsfunktion entsprechen müssen, wird die Klasse der auf $g(\varphi)$ wirkenden Mittelungsoperatoren durch die Mischungsbedingung (3.39) eingeschränkt. Diese Bedingung garantiert außerdem, daß die Energie der global stabilen Zustände durch eine Reduzierung des Gedächtnisses an die Anfangsverteilung angehoben wird. Die spezifische Wärme für stoßfrei global stabile Zustände ist damit bezüglich mischender Veränderungen der Zustände positiv. Die Wahl einer Mittelungsoperatorklasse aus der zulässigen Menge ist im Rahmen unseres Modells frei und entspricht einer Annahme über die exakte Dynamik der Systeme. Die Annahme einer starken Filamentierung der exakten Verteilungsfunktion, die für Phasenmischungseffekte typisch ist, führt zur Ähnlichkeitstransformation auf $g(\varphi)$. In Kapitel 3.2 wurde außerdem argumentiert, daß für andere Mittelungsoperatoren keine qualitativ anderen Ergebnisse, etwa in der Ortsraumdichteverteilung, zu erwarten sind, da die Mittelungsskalen stets selbstkonsistent bestimmt werden.

Zur Prüfung der Realitätsnähe unseres Modells haben wir vergleichende dynamische Rechnungen durchgeführt. Um numerische Probleme aus der erwarteten Phasenraumfilamentierung zu vermeiden, haben wir dabei eine Methode von Klimas (1987) benutzt. Sie erlaubt einen kontrollierten Informationsverlust, da es sich um eine streng gültige Dynamik auf großen Skalen im Geschwindigkeitsraum handelt. Es wurden drei Beispiele mit Kugelsymmetrie im Ortsraum vorgestellt. Die Vorhersagen der Modellrelaxation stimmten dabei in allen Fällen sehr gut mit den Resultaten der dynamischen Rechnungen überein. Es ist damit unseres Wissens erstmalig möglich, auf der Basis weniger Grundannahmen, realistische Vorhersagen über die Relaxation stoßfrei selbstgravitierender Materie zu machen, ohne dabei auf ad hoc Annahmen über das Gleichgewicht auf großen Skalen (z.B. fester Radius) angewiesen zu sein. Anhand der vorgestellten Beispiele wurde außerdem der Einfluß der Anfangsbedingungen auf die Endverteilungen für feste Gesamtmasse und Gesamtenergie diskutiert. Es zeigte sich, in Übereinstimmung mit der Modellrelaxation, daß Anfangszustände, deren Gedächtnisfunktionen sich nur durch eine Ähnlichkeitstransformation unterscheiden, bei gleicher Gesamtenergie zu gleichen Endgleichgewichten auf großen Skalen führen, obwohl die Anfangsverteilungen im $(\vec{r}, \vec{v})$ -Raum und die dynamischen Entwicklungen sehr unterschiedlich sein können. Anfangszustände, deren Gedächtnisfunktionen sich nicht durch eine Ähnlichkeitstransformation ineinander überführen lassen, zeigen auch bei gleicher Gesamtmasse und gleicher Gesamtenergie verschiedene Endzustände.

Den mit wachsendem energetischen Abstand eines Anfangszustandes von seinem assoziierten Gleichgewicht schwindenden Einfluß der Anfangsbedingungen auf einen Endzustand auf großen Skalen wollen wir noch einmal an dem besonders einfachen, weil vollständig analytisch behandelbaren Beispiel der Anfangsverteilungen vom Typ (3.47) diskutieren. Mit der Normierung von Kapitel 3.2 gilt hierbei :

$$E_0 = 0.3v_{max}^2 - 0.6$$

$$W_{\psi^*} = -0.35/v_{max}^2$$

$$\rho_c^* \approx 0.8/v_{max}^6$$

$$\bar{\rho}_c \approx 0.8/v_{max}^6 (E_0/W_{\psi^*})^3 \approx 0.5(2 - v_{max}^2)^3$$

Dabei ist ρ_c^* die Zentraldichte des zum Anfangszustand assoziierten Gleichgewichtes und $\bar{\rho}_c$ die Zentraldichte des Endgleichgewichtes auf großen Skalen (unter Verwendung der Ähnlichkeitstransformation zur Reduktion von $g(\varphi)$). Man erkennt, daß für $v_{max}^2 \ll 2$, d.h. für $|E_{pot}| \gg E_{kin}$ die Endzustände annähernd identisch werden, obwohl sich die Anfangszustände, etwa im Wert der Anfangsverteilung, beliebig unterscheiden können. Dies liegt daran, daß in diesem Parameterbereich $E_0 \approx E_{pot} \forall v_{max}$ gilt und sich die Anfangsverteilungen, bei etwa gleicher Gesamtenergie, in ihren Gedächtnisfunktionen wiederum nur um eine Ähnlichkeitstransformation unterscheiden. Betrachtet man etwa $v_{max} = 1; 0.1; 0.01; 0.001$, so liefern die drei letzten Parameterwerte annähernd identische Endverteilungen. Nimmt man, in Anlehnung an die Ergebnisse der dynamischen Rechnungen an, daß im Laufe der Dynamik der Systeme mindestens die Zentraldichte des zum Anfangszustand assoziierten Gleichgewichtes erreicht wird, so unterscheiden sich die maximalen Dichten im Laufe der Dynamik, für $v_{max} = 0.1$ und $v_{max} = 0.001$, hingegen um einen Faktor 10^{12} .

Obwohl es uns in dieser Arbeit in erster Linie um die prinzipielle Behandlung stoßfreier Relaxation selbstgravitierender Systeme als einen isolierten physikalischen Effekt ging, wollen wir kurz auf die Anwendbarkeit unserer Theorie auf reale astrophysikalische Systeme eingehen. Kandidaten für eine solche Anwendung können elliptische Galaxien (hier natürlich nur kugelsymmetrische) ohne starke Gaskomponente oder dunkle Materie sein (Rephaeli 1983, Madsen 1987). Selbst wenn die Annahme einer stoßfreien Entwicklung der Systeme nicht für Zeitskalen des Weltalters gerechtfertigt ist, kann stoßfreie Relaxation auf relativ kurzen Zeitskalen ($10^6 - 10^8$ Jahre für

Kugelsternhaufen bzw. elliptische Galaxien) zu quasistationären Zuständen führen. Stoßfrei relaxierte Zustände können dann als Grundlage für weitere Untersuchungen stoßbestimmter Prozesse dienen. Um einen Eindruck von den Effekten stoßfreier Relaxation zu geben, wollen wir für das oben beschriebene einfache Beispiel einige Parameterwerte für Galaxien einsetzen. Es sei darauf hingewiesen, daß die gewählten Anfangsverteilungen bei gleicher Geschwindigkeitsabhängigkeit und gegebenem Gesamtradius diejenigen größter Gesamtenergie sind. Die zugehörigen Endgleichgewichte sind damit diejenigen geringster Zentraldichte. Bei der Wahl anderer Anfangsverteilungen (z.B. vom Typ (4.42)) ergeben sich bei sonst gleichen Parametern leicht Unterschiede von einer Größenordnung in der Zentraldichte der Endgleichgewichte. Wir wählen

$$r_{typ} = 25 kpc$$

$$M_0 = 2 \cdot 10^{11} M_{\odot}$$

und

$$v_{max} = 2 \cdot 10^5 m/s \dots 2 \cdot 10^2 m/s$$

entsprechend dem oben angeführten Beispiel in normierter Form. Die Anfangsdichte der Systeme liegt in diesen Beispielen bei $\rho_0 \approx 0.003 M_{\odot}/pc^3$. Die Zentraldichte der Endgleichgewichte liegt für $v_{max} = 2 \cdot 10^5 m/s$ bei $\rho_c \approx 0.006 M_{\odot}/pc^3$ und für $v_{max} \leq 2 \cdot 10^4 m/s$ bei $\rho_c \approx 0.05 M_{\odot}/pc^3$. In diesem Beispiel werden die Endverteilungen auf großen Skalen also schon für typische Anfangsgeschwindigkeiten $< 10^4 m/s$ praktisch ununterscheidbar. Tendenziell kann man lediglich vermuten, daß Galaxien mit anfänglich sehr kleinen kinetischen Energien ein höheres Maß an Fluktuationen auf kleinen Skalen aufweisen sollten als solche höherer kinetischer Energie (in dem betrachteten Parameterbereich). Bei $v_{max} = 2 \cdot 10^4 m/s$ bzw. $v_{max} = 2 \cdot 10^3 m/s$ liegt $\alpha = f_{exakt}/\bar{f}$ (in diesem Beispiel) bei 450 bzw. $4.5 \cdot 10^5$.

Der Parameterbereich in v_{max} ist auch deshalb so weit gewählt, um eine Grenze unserer Theorie aufzeigen zu können. Benutzt man wieder das zum Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht als grobe Abschätzung für einen Extremwert der Dichteverteilung im Laufe der Dynamik, so ergibt sich für $v_{max} = 200m/s$ zu einem Zeitpunkt eine Systemgröße von nur etwa $r \approx 0.03pc$. Bei der angenommenen Gesamtmasse liegt der Schwarzschildradius des gesamten Systems aber in der gleichen Größenordnung, so daß unsere Theorie mit rein Newtonscher Gravitationswechselwirkung in diesem Parameterbereich keinerlei Aussage gestattet. Bei realistischeren Geschwindigkeiten $> 200m/s$ werden allgemeinrelativistische Effekte zwar keine Rolle für die Gesamtdynamik des Systems spielen, jedoch können sie für den Zentralbereich einer Galaxie möglicherweise wichtig werden. Dabei ist anzumerken, daß der Beweis des Nicht-Kollapses stoßfreier selbstgravitierender Systeme Newtonscher Wechselwirkung (Wiechen et al. 1988) schon bei der Beachtung speziellrelativistischer Effekte nicht mehr ohne weiteres übertragbar ist. Deshalb muß man prinzipiell mit Kollaps-Erscheinungen im Zentralgebiet von Galaxien rechnen, selbst wenn die Galaxien als vollständig stoßfrei angesehen werden können. Da im Zentralbereich von Galaxien oft massive Objekte beobachtet oder aus dynamischen Gründen zumindest vermutet werden (z.B. Light et al. 1974, Rees 1984), scheint die Beantwortung der Frage, ob durch die Dynamik der Gesamtsysteme getriebene stoßfreie Kollapsphänomene im Zentralgebiet von Galaxien möglich sind, lohnend.

Neben diesem Aspekt bleiben in unserem Modell noch eine Reihe von Fragen offen. Insbesondere die Anmerkungen zum Fall nicht verschwindenden Gesamtdrehimpulses (Kapitel 5) haben gezeigt, daß es zur Beschreibung realistischer Systeme notwendig ist, weitere Konstanten der Bewegung zu berücksichtigen. Konstanten der Bewegung der exakten Dynamik (soweit bekannt) können bei der Berechnung des zum Anfangszustand assoziierten Gleichgewichtes berücksichtigt werden. Andere, z.B. aus numerischen Simulationen gefundene Bedingungen an die Dynamik auf

großen Skalen können benutzt werden, um die Klasse der Mittelungsoperatoren weiter einzuschränken, was zu einer Erhöhung der Genauigkeit der Methode führen kann. Für die Entwicklung von Galaxien ist stoßfreie Relaxation sicherlich ein wichtiger physikalischer Prozeß, der aber oft nur ein Prozeß unter vielen ist. Für eine Beschreibung tatsächlich existierender Systeme ist deshalb langfristig eine Verschmelzung mit anderen Theorien anzustreben. So ist etwa die Sternkomponente einer elliptischen Galaxie gut stoßfrei beschreibbar, jedoch beobachtet man oft (z.B. Schweizer 1987, Sadler 1987) einen nicht unbeträchtlichen Anteil Gases in den Galaxien, der meist nicht stoßfrei beschreibbar ist.

Unter Berücksichtigung der genannten Grenzen ist es in der vorliegenden Arbeit gelungen, ein neues Konzept der dynamischen Relaxation stoßfrei selbstgravitierender Systeme quantitativ durchzuführen. Dabei sind grundsätzliche Schwierigkeiten bisheriger Modelle vermieden worden. Die Ergebnisse zeigen erstmalig eine quantitative Übereinstimmung mit dynamischen Simulationsrechnungen.

Anhang A

Wie wollen hier die in Kapitel 3.2 angeführte interessante Transformationseigenschaft von Gleichung (3.43) gegenüber Ähnlichkeitstransformationen der Gedächtnisfunktion $g(\varphi)$ beweisen. Während die richtige Mittelungsskala zur Reduzierung der Gedächtnisfunktion im allgemeinen nur durch eine Iteration auf diese Skala zu erhalten ist, erlaubt die Ähnlichkeitstransformation (3.45) eine analytische Behandlung, sofern das zum Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht bekannt ist.

Satz

Sei ψ^* eine Lösung von

$$\Delta\psi^* = 4\pi G \int g_0(\varphi_{\psi^*}(h)) d^3v = 4\pi G \varrho^* \quad (A1)$$

und

$$g_\alpha(\varphi) = \alpha^{-1} g_0(\alpha^{-1}\varphi) \quad (A2)$$

dann ist

$$\alpha^{-2/3} \psi^*(\alpha^{-2/3} \vec{r}) =: \bar{\psi}(\vec{r}) \quad (A3)$$

eine Lösung von

$$\Delta\bar{\psi} = 4\pi G \int g_\alpha(\varphi_{\bar{\psi}}(h)) d^3v. \quad (A4)$$

Beweis :

Mit der Definition von $\bar{\psi}$ und g_α sowie der Transformation $\vec{r}' =: \alpha^{-2/3} \vec{r}$, kann Gleichung (A4) als

$$\Delta_{\vec{r}'} \psi^*(\vec{r}') = 4\pi G \alpha^{-1/3} \int g_0(\alpha^{-1} \varphi_{\bar{\psi}}(h)) d^3v \quad (A5)$$

geschrieben werden. Mit der Definition von $\varphi_{\bar{\psi}}(h)$ (siehe Gleichung (2.9)) und der Transformation $h' = \alpha^{2/3} h$ erhält man

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\bar{\psi}(h)} &= \int S\left(h - \frac{v^2}{2} - \bar{\psi}(\vec{r})\right) d^3 r d^3 v \\
 &= \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} \int S(h - \bar{\psi}(\vec{r}))(h - \bar{\psi}(\vec{r}))^{2/3} d^3 r \\
 &= \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} \alpha \int S(h' - \psi^*(\vec{r}')) (h' - \psi^*(\vec{r}'))^{3/2} d^3 r' \\
 &= \alpha \varphi_{\psi^*(\vec{r}')} (h') .
 \end{aligned} \tag{A6}$$

Einsetzen von (A6) in (A5), Übergang von einer v Integration zu einer h' Integration und Transformation auf die Koordinate $\vec{r}'$ liefert

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\vec{r}'} \psi^*(\vec{r}') &= 16\pi^2 G \sqrt{2} \int S(h' - \psi^*(\vec{r}')) g_0(\varphi_{\psi^*(\vec{r}')} (h')) \sqrt{h' - \psi^*(\vec{r}')} dh' \\
 &= 4\pi G \varrho^*(\vec{r}') .
 \end{aligned} \tag{A7}$$

(q.e.d.)

Mit diesem Ergebnis erhält man leicht die Transformationen der anderen typischen Größen. Es gilt

$$\varrho_\alpha \rightarrow \alpha^{-2} \varrho^*(\alpha^{-2/3} \vec{r}) \tag{A8}$$

$$\psi_\alpha \rightarrow \alpha^{-2/3} \psi^*(\alpha^{-2/3} \vec{r}) \tag{A9}$$

$$W_\alpha \rightarrow \alpha^{-2/3} W_{\psi^*}^* \tag{A10}$$

falls $g_0(\varphi)$ gemäß (A2) reduziert wird. Aus (A10) erhält man sofort die richtige Mittelungsskala α_f zur Erreichung eines global stabilen Gleichgewichtes der Energie E_0 zu

$$\alpha_f = (W_{\psi^*} / E_0)^{3/2} . \tag{A11}$$

Anhang B

Wir wollen hier etwas genauer auf die Realisierung des numerischen Schemas zur Lösung von Gleichung (4.41) und (4.40) eingehen und einige technische Aspekte ansprechen, sowie eine Fehlerabschätzung angeben.

Die gemittelte Boltzmann-Gleichung wurde in der Form von Gleichung (4.41) analog zu (4.21) und (4.22) diskretisiert. Das Verfahren ist deshalb von zweiter Ordnung in der Zeit und der Orts- bzw. Geschwindigkeitsdiskretisierung. Da in diesem Schema die Werte der Verteilungsfunktion zur Bildung der gemischten Ableitungen auf der rechten Seite von (4.41) zu den entsprechenden Zeitschritten nicht zur Verfügung stehen, wurden diese durch Interpolation aus den benachbarten Stützstellen bestimmt. Die Diskretisierung in den Variablen r, v, μ erfolgte auf einem beliebigen aber festen Gitter. Die Zeitschritte wurden dabei automatisch angepasst.

$$r \in [0, r_m] \longrightarrow r_i \quad i \in [1, \dots, i_{max}] \Rightarrow \Delta r_i = r_{i+1} - r_{i-1} \quad (B1)$$

$$v \in [0, v_m] \longrightarrow v_j \quad j \in [1, \dots, j_{max}] \Rightarrow \Delta v_j = v_{j+1} - v_{j-1} \quad (B2)$$

$$\mu \in [-1, 1] \longrightarrow \mu_k \quad k \in [1, \dots, k_{max}] \Rightarrow \Delta \mu_j = \mu_{k+1} - \mu_{k-1} \quad (B3)$$

Tatsächlich wurde das Gitter in μ äquidistant gewählt. Die Gitter in r und v wurden äquidistant in einem zentralen Bereich $r < r_c, v < v_c$ und gröber werdend in den weniger interessanten äußeren Bereichen gewählt. Um keine zu großen Abweichungen von der Gitterzentrierung in r und v zu erhalten, geschah der Übergang vom inneren, feinen Gitter zum äußeren, groben Gitter allmählich, gemäß der folgenden Vorschrift (für v ; entsprechend):

$$r_i = \begin{cases} C(i-1) & \text{für } i \in [1, i_c - 1] \\ C(i-1) - A(\cos(k_1 i + k_2) + 1) & \text{für } i \in [i_c, i_{max}] \end{cases} \quad (B4)$$

mit

$$A = \frac{2(1-E)}{\pi - 2(1-E)}(r_m - r_c)$$

$$C = \frac{r_m + A}{i_{max} - 1}$$

$$i_c = \frac{r_c + C}{C}$$

$$k_1 = \frac{\pi/2}{i_{max} - i_c} \quad k_2 = \pi - k_1 i_c ,$$

wobei E der Expansionsfaktor für die Stützstellenabstände ist ($E \Delta r_{i < i_c} \approx \Delta r_{i = i_{max}}$). Aus programmiertechnischen Gründen wurde f , anders als in (4.40),(4.41) nur auf einem dreidimensionalen Feld abgelegt, wobei jeweils zwischen den Gitterpunkten, deren Summe der Indizes gerade bzw. ungerade ist, zu unterscheiden ist (siehe weiter unten).

Die Formulierung des Diskretisierungsschemas erfolgte, bis auf wenige Ausnahmen (z.B. Vergleichsoperationen zur Zeitschritt-Steuerung), in FORTRAN-77 (gemäß ANSI X3.9-1978). Diese wurde am Vektorrechner des Rechenzentrums der Ruhr-Universität Bochum (Cyber 205) implementiert. Um mit Hilfe des automatischen Vektorisierers des CDC-Cyber 200 Fortran Version 2 - Compilers in jedem Falle einen hohen Vektorisierungsgrad zu erreichen, war es günstig, zwei Richtungen des dreidimensionalen Feldes $f_{j,k,i}$ durch Umnummerierung der Indizes in einen Vektor zu schreiben.

$$f_{j,k,i} \longrightarrow f_{l=(j-1)k_{max}+k,i} \quad (B5)$$

Dadurch erreichen die zu bearbeitenden Vektoren eine hinreichende Länge, so daß Startzeiten zum Schalten der Vektorprozessoren, die die Effizienz der Vektorisierung negativ beeinflussen, vernachlässigbar werden (zumindest für den zentralen Teil des Programms). Damit lautet das Verfahren zur Lösung von (4.41) für den inneren Bereich des Rechengebietes:

$$\forall i + l \text{ gerade}$$

$$f_{l,i} = \bar{f}_{l,i} - \frac{\Delta t}{2} (F_{l,i}^1 + F_{l,i}^2 + F_{l,i}^3 + F_{l,i}^4) \quad (B6)$$

$\forall i + l \text{ ungerade}$

$$f_{l,i} = f_{l,i} - \Delta t (F_{l,i}^1 + F_{l,i}^2 + F_{l,i}^3 + F_{l,i}^4) \quad (B7)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{f}_{l,i} &= \frac{1}{6} (f_{l,i+1} + f_{l,i-1} + f_{l+1,i} + f_{l-1,i} + f_{l+j_{max},i} + f_{l-j_{max},i}) \\ F_{l,i}^1 &= \frac{(v\mu)_l}{\Delta r_i} (f_{l,i+1} - f_{l,i-1}) \\ F_{l,i}^2 &= - \left(\frac{M(r)}{r^2} \right)_i \left(\frac{\mu}{\Delta v} \right)_l (f_{l+1,i} - f_{l-1,i}) \\ F_{l,i}^3 &= \left\{ \left(\frac{(1-\mu^2)v}{\Delta\mu} \right)_l \left(\frac{1}{r} \right)_i - \left(\frac{(1-\mu^2)}{v\Delta\mu} \right)_l \left(\frac{M(r)}{r^2} \right)_i \right\} (f_{l+j_{max},i} - f_{l-j_{max},i}) \\ F_{l,i}^4 &= \left(\frac{v_0^2}{\Delta r} \right)_i \\ &\quad \left\{ \left(\frac{\mu}{\Delta v} + \frac{(1-\mu^2)}{v\Delta\mu} \right)_l \right. \\ &\quad \left. (f_{l+j_{max}+1,i+1} + f_{l-j_{max}-1,i-1} - f_{l-j_{max}-1,i+1} - f_{l+j_{max}+1,i-1}) \right. \\ &\quad + \\ &\quad \left. \left(\frac{\mu}{\Delta v} - \frac{(1-\mu^2)}{v\Delta\mu} \right)_l \right. \\ &\quad \left. (f_{l-j_{max}+1,i+1} + f_{l+j_{max}-1,i-1} - f_{l+j_{max}-1,i+1} - f_{l-j_{max}+1,i-1}) \right\} \end{aligned}$$

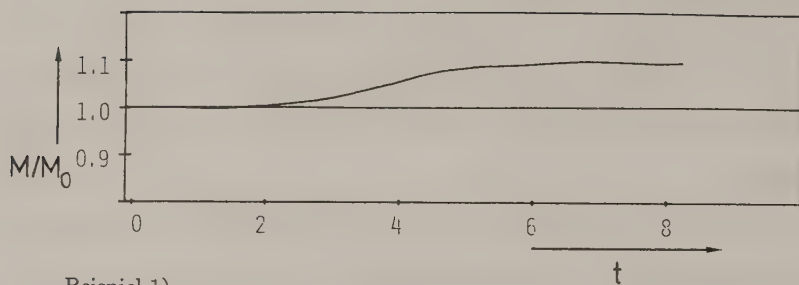
Zusätzlich ist nach jedem Halbschritt die Masse M innerhalb von $r_i \forall i$ zu berechnen (siehe Gleichung (4.40)), woraus man die Kraft $(M(r)/r^2)_i$ an den Stützstellen i erhält. Dazu wurden Schemata höherer Ordnung gewählt (lokale Fehlerordnung 3 in jedem Halbschritt). Da dabei wiederum zwischen Stützstellen, deren Summe der Indizes gerade bzw. ungerade ist, zu unterscheiden ist, wurden, für die Integrationen über den Geschwindigkeitsraum (Laufindex l), ein Simpson- und ein 3/8-Schema kombiniert, um Schritte niedrigerer Ordnung an den Rändern des Integrationsgebietes vermeiden zu können. Die Schemata wurden natürlich auf die nicht-äquidistante Zerlegung des Gebietes und die entsprechenden Phasenvolumina (auf

Grund der Geometrie) verallgemeinert. Für die Integration der Ortsraumdicke zu $M(r)$ konnte dann wieder ein Simpson-Schema für alle Stützstellen benutzt werden. Integrationen zu Diagnosezwecken (z.B. Energie, Entropie ...) wurden in niedrigerer Ordnung (lokale Fehlerordnung 2) ausgeführt, da hierbei keine Fehlerakkumulation in t auftritt.

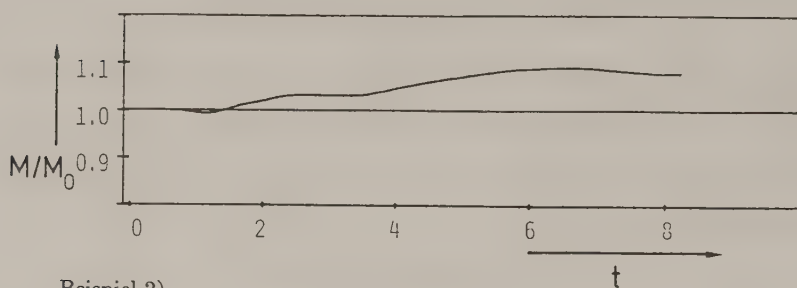
Nach Konstruktion des Verfahrens sind die lokalen Fehler bei der Lösung des $(\overline{BPS})$ pro Zeitschritt von dritter Ordnung in der Stützstellenweite. Bei der gegebenen Zahl der Gitterpunkte und der gewählten Diskretisierung ist deshalb ein lokaler Fehler der Ordnung 10^{-5} zu erwarten. Bei der Wahl der Zeitschritte sind wir bei unserem expliziten Verfahren nicht frei. Vielmehr müssen wir die Zeitschritte so wählen, daß das numerische Schema stabil ist (in Anlehnung an (4.12)). Für unser Problem liefert der vierte Term auf der rechten Seite von Gleichung (4.41) das schärfste Kriterium, so daß

$$\Delta t \sim \min \left| \frac{\Delta \mu}{1 - \mu^2} \left(\frac{v}{r} - \frac{M}{r^2 v} \right)^{-1} \right|$$

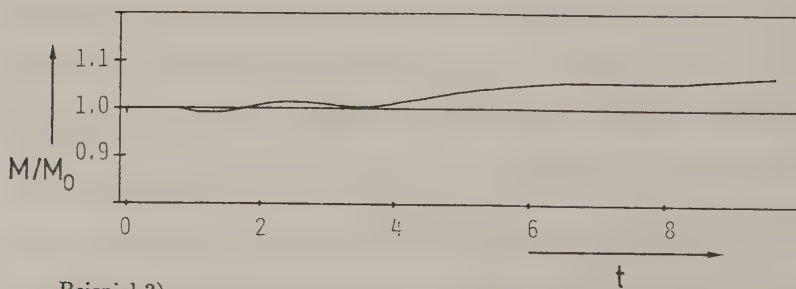
zu wählen ist. Dies führt dazu, daß in unseren Beispielen durchschnittlich 6000 Zeitschritte zur Berechnung der Dynamik während einer dynamischen Zeit notwendig sind. Nach 8 dynamischen Zeiten muß , nach dieser groben Abschätzung, deshalb mit einem numerischen Fehler von etwa 50% gerechnet werden. Tatsächlich werden die numerischen Fehler kleiner ausfallen, da eine vollständige Fehlerakkumulation erfahrungsgemäß nicht zu befürchten ist. Da Gesamtmasse und Gesamtenergie Konstanten der Bewegung der gemittelten Dynamik sind, wurden diese für einen Test auf die numerischen Fehler herangezogen. Der relative Fehler in beiden Größen betrug in allen Beispielen etwa 10% nach 8 dynamischen Zeiten (siehe Abb. B1,B2).



Beispiel 1)

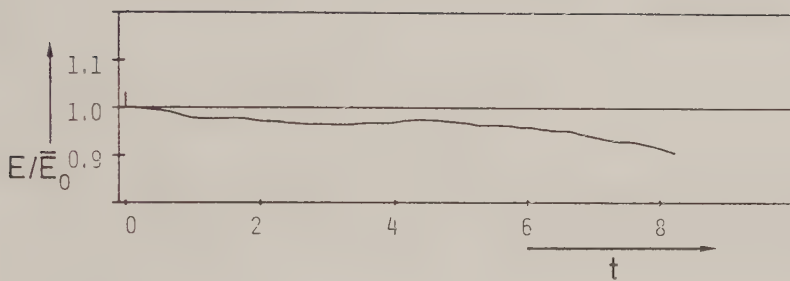


Beispiel 2)

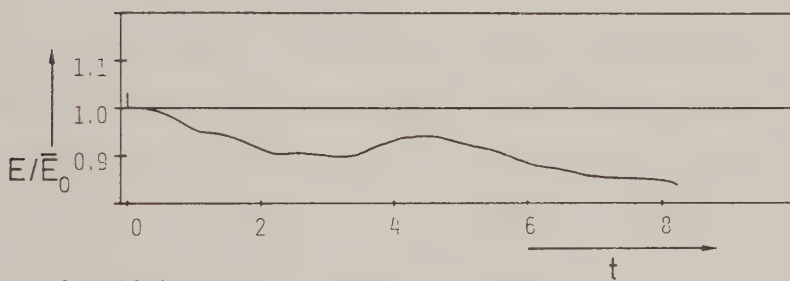


Beispiel 3)

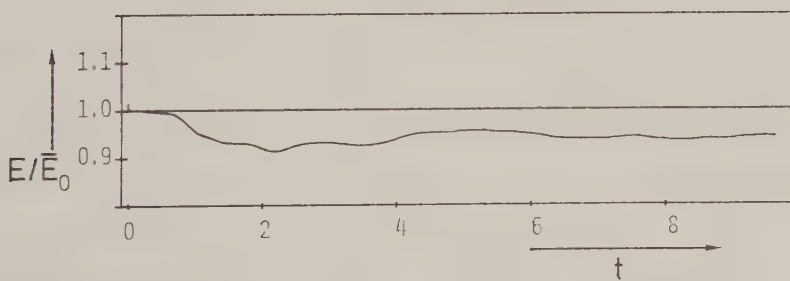
Abb. B1 Relativer Fehler des numerischen Verfahrens in der Gesamtmasse als Funktion der Zeit für die Beispiele aus Kapitel 4.5



Beispiel 1)



Beispiel 2)



Beispiel 3)

Abb. B2 Relativer Fehler des numerischen Verfahrens in der Gesamtenergie als Funktion der Zeit für die Beispiele aus Kapitel 4.5

Anhang C

Um die Dynamik der Systeme auch im Phasenraum betrachten zu können, wurden einige Schnitte für konstantes r gelegt, so daß die Verteilungsfunktion $\bar{f}(r = \text{const}, v, \mu, t = \text{const})$ darstellbar wird. Aufgrund der Fülle des Materials soll hier nur ein representatives Beispiel angeführt werden. In Abbildung C1 finden sich die Höhenlinien von $\bar{f}$ (Beispiel 2) für $r = 0.36$ zu verschiedenen Zeiten. Für $t = 0$ (erstes Bild) sind außerdem die Höhenlinien der exakten Verteilungsfunktion dargestellt. Es zeigt sich das dynamische Verhalten, das man grob schon aus der Ortsraumdichteverteilung als Funktion der Zeit erwarten konnte. Für $t < 1$ zeigt sich Strömung vorwiegend in negativer r Richtung, wobei die Beträge der maximalen Geschwindigkeiten deutlich größer werden. Für $t > 1$ kehrt sich dieser Prozeß um und ab $t = 3.2$ ist bereits fast ein stationärer Zustand erreicht. Die Relaxation im Geschwindigkeitsraum ist dabei für kleine r deutlich schneller abgeschlossen als für große r , wie dies wegen der unterschiedlichen lokalen dynamischen Zeiten zu erwarten ist. In Abbildung C1 sieht man auch Ansätze zu einer Phasenraumfilamentierung. Aufgrund der gemittelten Dynamik schreitet diese Filamentierung aber nicht voran und bleibt deutlich unter dem in (4.30) abgeschätzten Niveau.

Wegen der besonderen Mittelung der Dynamik können wir, wie in Kapitel 4.5 bereits angesprochen, anders als im Ortsraum, auch bei verschwindenden numerischen Fehlern eine Übereinstimmung mit der Ergebnissen der Modellrelaxation nur bis auf Abweichungen von der Skala v_0 erwarten. Berücksichtigt man zusätzlich die numerischen Fehler von etwa 10%, so zeigen Abbildung C2 und C3 auch im Geschwindigkeitsraum eine gute Übereinstimmung der dynamischen Ergebnisse mit den Vorhersagen der Modellrelaxation. In C2 und C3 sind für $r = 0$ und $r = 0.36$ (wieder für Beispiel 2 aus Kapitel 4.5) die Höhenlinien der Verteilungsfunktion am Ende der dynamischen Rechnung aufgetragen. Die Endverteilungen wurden dabei wieder (wie

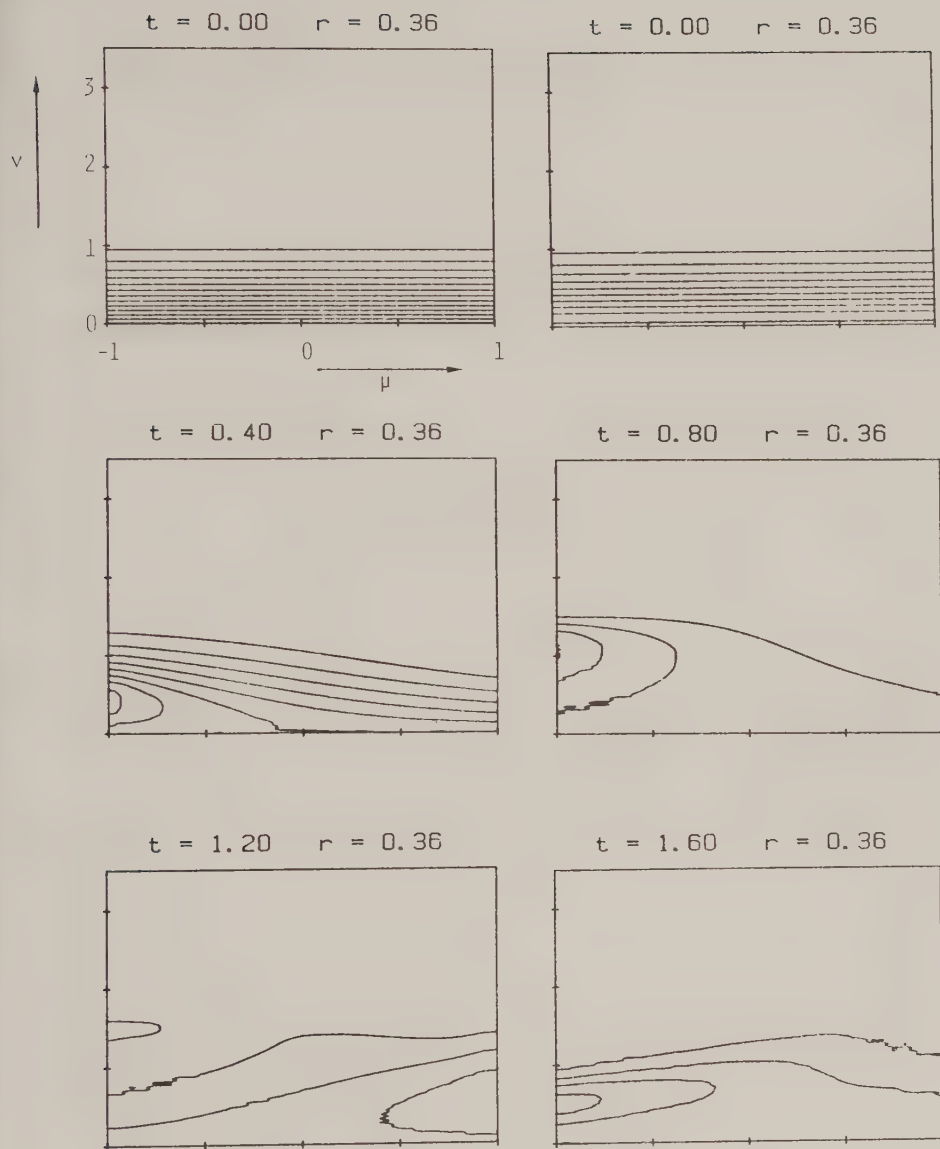


Abb. C1

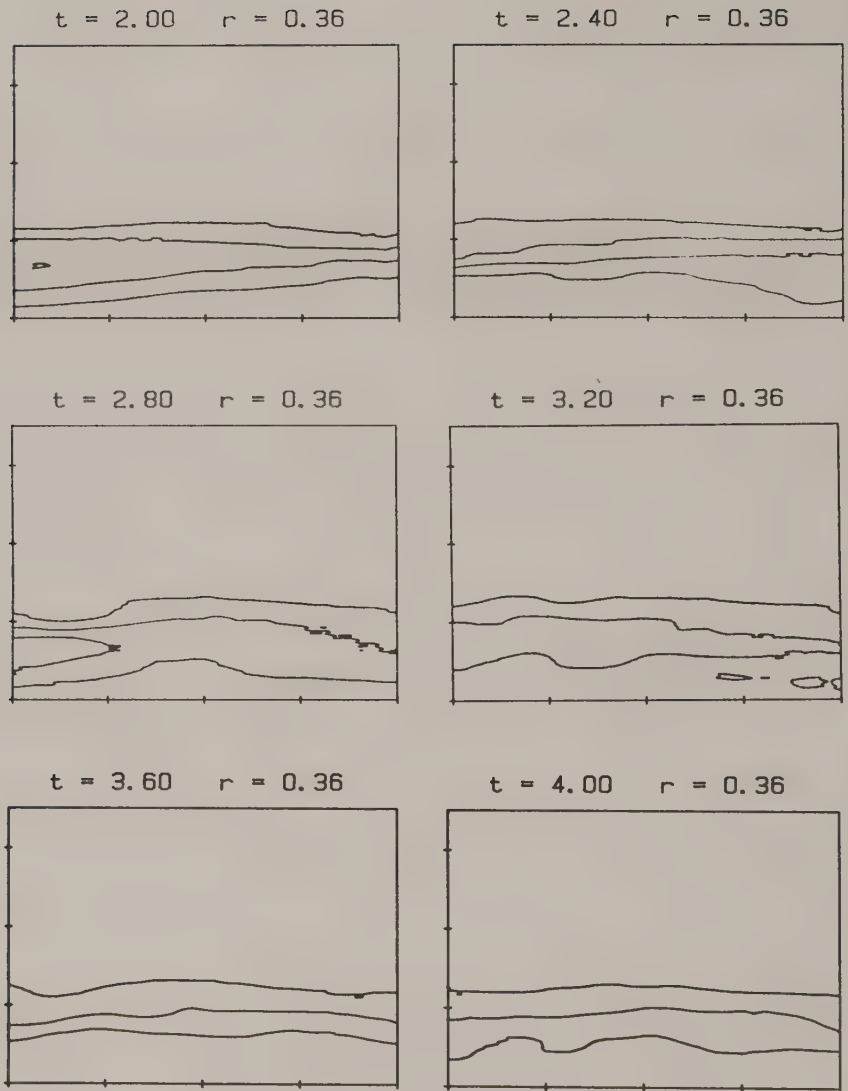


Abb. C1 Höhenlinien der gemittelten Verteilungsfunktion (Beispiel 2, Kapitel 4.5) bei $r = 0.36$ zu verschiedenen Zeiten.

in Kapitel 4.5) über die letzte gerechnete dynamische Zeit gemittelt. Daneben sind auch die Höhenlinien der Endverteilung aus der Modellrelaxation eingetragen.

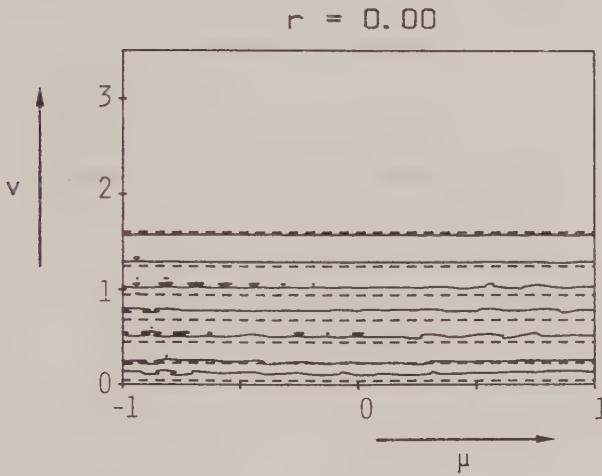


Abb. C2 Höhenlinien der gemittelten Verteilungsfunktion (Beispiel 2, Kapitel 4.5) bei $r = 0$ für $t \approx 8$ zusammen mit den Vorhersagen der Modellrelaxation (gestrichelte Linien). Die Höhenlinien liegen auf Werten von $f = 0.1; 0.2; 0.3 \dots$

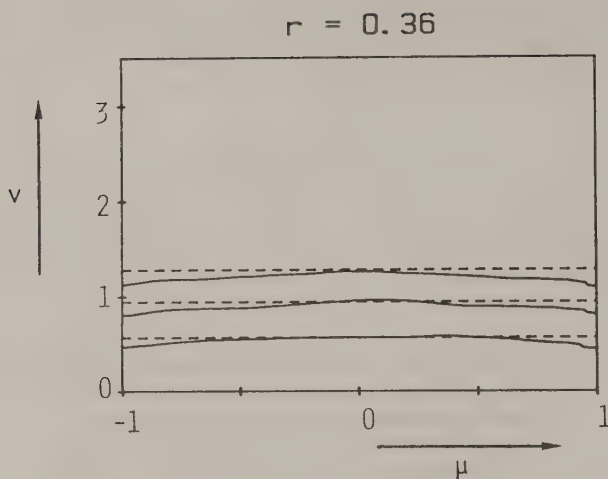


Abb. C3 Höhenlinien der gemittelten Verteilungsfunktion (Beispiel 2, Kapitel 4.5) bei $r = 0.36$ für $t \approx 8$ zusammen mit den Vorhersagen der Modellrelaxation (gestrichelte Linien). Die Höhenlinien liegen auf Werten von $f = 0.05; 0.1; 0.15 \dots$

Literatur

- Aly, J.J., 1989. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , eingereicht.
- Balescu, R., 1975. *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, New York.
- Binney, J., 1976. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **177**, 19.
- Binney, J., 1982. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **200**, 951.
- Bouvier, P. & Janin, G., 1970. *Astron. Astrophys.* , **5**, 127.
- Braun, W. & Hepp, K., 1977. *Commun. Math. Phys.*, **56**, 101.
- Cheng, C.Z. & Knorr, G., 1976. *J. Comput. Phys.*, **22**, 330.
- Courant, R., Friedrichs, K.O. & Lewy, H., 1928. *Math. Ann.*, **100**, 32.
- Dejonghe, H., 1987. *Astrophys. Journal* , **320**, 477.
- de Vaucouleurs, G., 1953. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **113**, 134.
- Friedman, A.M. & Polyachenko, V.L., 1984. *Physics of Gravitating Systems*, Bd. I, Springer, New York.
- Garabedian, P.R., 1964, *Partial Differential Equations*, Wiley, New York.
- Goldstein, H., 1981. *Dissertation*, Ruhr-Universität Bochum.
- Gott III, J.R., 1973. *Astrophys. Journal* , **186**, 481.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E. & Pólya, G., 1952. *Inequalities*, 2. Ausg., Cambridge University Press.
- Hénon, M., 1964. *Ann. Astrophys.*, **27**, 83.
- Hoffman, Y., Shlosman, I. & Shaviv, G., 1979. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **189**, 737.
- Kellog, P.J., 1965. *Phys. Fluids*, **8**, 102.
- Kießling, M.K.H., 1989. *J. Stat. Phys.*, **55**, 203.
- Klimas, A.J., 1987. *J. Comput. Phys.*, **68**, 202.
- Light, E.S., Danielson, R.E. & Schwarzschild, M., 1974. *Astrophys. Journal* , **194**, 257.

- Lynden-Bell, D., 1967. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **136**, 101.
- Lynden-Bell, D. & Wood, R., 1968. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **138**, 495.
- Madsen, J., 1987. *Astrophys. Journal* , **316**, 497.
- Mathur, S.D., 1988. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **231**, 367.
- May, A. & van Albada, T.S., 1984. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **209**, 15.
- Narnhofer, H. & Sewell, G.L., 1981. *Commun. Math. Phys.*, **79**, 9.
- Potter, D., 1973. *Computational Physics*, Wiley, New York.
- Rees, M.J., 1984. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **22**, 471.
- Rephaeli, Y., 1983. *Astron. Astrophys.* , **123**, 98.
- Richestone, D.O. & Tremaine, S., 1988. *Astrophys. Journal* , **327**, 82.
- Richtmyer, R.D. & Norton, K.W., 1967. *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2. Ausg., Interscience Publishers, Wiley.
- Sadler, E.M., 1987. in *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, IAU-Symposium Nr. **127**, Reidel.
- Saslaw, W.C., 1968. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **141**, 1.
- Saslaw, W.C., 1969. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **143**, 437.
- Schindler, K. & Goldstein, H., 1983. *Phys. Fluids*, **26**, 2222.
- Schweizer, F., 1987. in *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, IAU-Symposium Nr. **127**, Reidel.
- Seboldt, W., 1982. *Dissertation*, Ruhr-Universität Bochum.
- Shlosman, I., Hoffman, Y. & Shaviv, G., 1979. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **189**, 723.
- Shu, F.H., 1978. *Astrophys. Journal* , **225**, 83.
- Stahl, B., Ziegler, H.J. & Wiechen, H., 1989. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , eingereicht.
- Tanekusa, J., 1987. *Publ. Astron. Soc. Japan*, **39**, 425.
- Tremaine, S., Hénon, M. & Lynden-Bell, D., 1986. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **219**, 285.
- van Albada, T.S., 1982. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , **201**, 939.

- Wiechen, H., 1989. *Dissertation*, Ruhr-Universität Bochum.
- Wiechen, H., Ziegler, H.J. & Schindler, K., 1988. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , 232, 623.
- Wehrl, A., 1978. *Rev. Mod. Phys.*, 50, 221.
- Ziegler, H.J. & Wiechen, H., 1989. *Mon. Not. R. astr. Soc.* , im Druck.

Lebenslauf

Name	Harald Jürgen Ziegler
Geburtsdatum	17.6.1959
Geburtsort	Homburg am N.Rh. (jetzt Duisburg)
Eltern	Hildegard Ziegler, geb. Berns Fritz Ziegler
Schulbesuch	1966 bis 1969 Gemeinschaftsschule Asterlagen in Rheinhausen 1969 bis 1970 Gemeinschafts-Hauptschule Hochemmericher Straße in Rheinhausen 1970 bis 1979 Städt. mathematisch-naturwissenschaftliches Gymnasium Rheinhausen (später Krupp-Gymnasium Duisburg)
Wehrdienst	1979 bis 1980 in Essen
Studium der Physik	seit WS 1980 Ruhr-Universität Bochum
Diplom-Vorprüfung	22.10.1982
Diplomprüfung	9.6.1986
Thema der Diplomarbeit	Zur Struktur senkrechter Stoßwellen im Plasma
Wissenschaftlicher Mitarbeiter	seit 1.7.1986 Ruhr-Universität Bochum

